

**Raport stiintific privind implementarea proiectului in perioada
septembrie 2013-decembrie 2015**

PN-II-ID-PCE-2012-4-0078

(Dated: November 25, 2015)

I. RAPORT STIINTIFIC SEPTEMBRIE 2013-DECEMBRIE 2015

In cadrul proiectului au fost trimise in total spre publicare optsprezece lucrari dintre care sase au fost acceptate spre publicare sau publicate in Int. J. Mod. Phys. A, doua au fost publicata in Mod. Phys. Lett. A, una in Phys. Lett. B, doua in Rom.J. Phys si sapte sunt in curs de evaluare.

In cadrul etapei unice a proiectului pe anul 2013 a fost trecut umratorul obiectiv:

1) Indicatii despre confinement in cadrul unei noi simetrii a teoriilor de etalonare. In cadrul acestui obiectiv au fost propuse urmatoarele activitati.

- a) Implementarea unei noi simetrii in teoriile de etalonare.
- b) Aplicatii ale noii simetrii.

In cadrul etapei unice pe anul 2014 au fost propuse trei obiective:

1) Functia de partitie pentru o teorie scalara fara rupere spontana a simetriei intr-o noua metoda de integrare functionala. In cadrul acestui obiectiv au fost propuse doua activitati:

- a) Stabilirea unei noi metode de integrare functionala.
- b) Determinarea propagatorului scalar.

2) Functia de partitite in teoriile de etalonare cu fermioni intr-un nou formalism functional. In cadrul acestui obiectiv au fost propuse doua activitati:

- a) Stabilirea unui nou cadru functional cu privire la functia de partitie.
- b) Formule de corelare a functiilor de partitie in noul formalism.

3) Functia de partitite in teoriile de etalonare cu interactie tare intr-un nou formalism functional. In cadrul acestui obiectiv a fost propusa o singura activitate.

- a) Aplicatii la teoriile de etalonare cu interactie tare.

In cadrul etapei unice pe anul 2015 au fost propuse trei obiective:

1) Functia beta la ordine mai mari sau la toate ordinele pentru teoriile de etalonare nonabeliane cu fermioni. Acest obiectiv include o activitate:

a) O evaluare analitica a functiei beta la ordine mai mari sau pentru toate ordinele pentru teoriile de etalonare nonabeliane cu fermioni.

2) O noua perspectiva asupra tranzitiilor de faza pentru teoriile de etalonare. Acest obiectiv cuprinde o activitate:

- a) Aplicatii ale formalismului functional la studiul tranzitiilor de faza.

3) Tranzitiile de faza pentru teoriile de etalonare nonabeliene. Acest obiectiv contine o

activitate:

a) Studiul tranzitiilor de faza in teoriile de etalonare nonabeliane.

Vom discuta rezultatele stiintifice obtinute pe obiective.

A. Indicatii despre confinement in cadrul unei noi simetrii a teoriilor de etalonare.

Pornind de la studiul operatorilor non-chirali care actioneaza intr-o teorie generala de etalonare am propus o noua simetrie care actioneaza asupra unui Lagrangian ce contine atat campuri de etalonare cat si fermioni si campuri scalare. Mai intai am introdus operatorul non-hermitian K ,

$$K = \exp[k\gamma^\mu D_\mu] \quad (1.1)$$

ce actioneaza asupra fermionilor. Am demonstrat apoi ca un lagrangian invariant la actiunea unei simetrii de etalonare abeliene este de asemenea invariant la actiunea urmatoarelor transformari infinitesimale:

$$\begin{aligned} \Psi' &= \Psi + k\gamma^\mu D'_\mu \Psi \\ A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{g}\alpha \\ B' &= B \end{aligned} \quad (1.2)$$

cu conditia ca campul scalar B sa fie identificat pana la inversul unui "scale factor" cu parametrul de etalonare:

$$\alpha = kB. \quad (1.3)$$

In esenta demonstratia este continuta in:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu D'_\mu \Psi - \Psi^\dagger \gamma^0 B \Psi + ik(\gamma^\rho D'_\rho \Psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu D'_\mu \Psi + \\ &+ ik\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu D'_\mu \gamma^\rho D'_\rho \Psi - k(\gamma^\rho D_\rho \Psi)^\dagger \gamma^0 B \Psi - k\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\rho D_\rho \Psi = \\ &= i\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu D'_\mu \Psi + k\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu B \Psi - \Psi^\dagger \gamma^0 B \Psi = \\ &= \mathcal{L} + gk\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (A'_\mu - A_\mu) \Psi + k\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu B \Psi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Am demonstrat apoi ca acelasi tip de simetrie actioneaza si asupra unui lagrangian ce contine campuri de etalonare non-abeliene:

$$\begin{aligned} &-(\gamma^\rho D_\rho \Psi)^\dagger \gamma^0 B \Psi - \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\rho D_\rho (B \Psi) = \\ &= \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\rho (D_\rho B) \Psi \end{aligned} \quad (1.5)$$

De data aceasta obtinem ca,

$$g(A'_\mu - A_\mu) = -kD_\mu B. \quad (1.6)$$

Am aplicat aceleasi transformari tuturor termenilor din modelul standard al particulelor elementare dupa ruperea spontana a simetriei electrolabe si am demonstrat invarianta lagrangianului corespunzator. Aceasta noua simetrie are implicatii importante atat pentru sectorul corespunzator cromodinamicii cuantice cat si pentru cel al bozonului Higgs.

Simetria introdusa in Eq. (1.2) este o simetrie valida in forma ei infinitezimala deci pentru impulsuri $p \ll \frac{1}{k}$. Este bine stiut ca transformarile de etalonare sunt simetrii bune ale unui lagrangian abelian sau nonabelian atat in forma lor infinitezimala cat si cea finita. Simetria indusa de operatorul K' (care contine campurile de etalonare transformate) este foarte complicata in forma ei finita asa ca am studiat actiunea ei numai ” on-shell” asupra unui lagrangian non-abelian, in speta QCD.

Cerem ca,

$$(K'\Psi^\dagger)\gamma^0(i\gamma^\mu D'_\mu - m - B)(K'\Psi) = \Psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^\mu D_\mu - m - B)\Psi. \quad (1.7)$$

O posibila solutie e data de,

$$\begin{aligned} K'\Psi &= \Psi' \\ \ln(K')\Psi &= i\alpha\Psi \\ (-igk\gamma^\mu(A'_\mu - A_\mu) + ikm + ikB) &= i\alpha\Psi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Invarianta Lagrangianului la actiunea transformarilor induse de K' impune anumite constrangeri asupra campului scalar ce este proportional cu parametrul de etalonare si anume:

$$\partial^\mu B^a \partial_\mu B^a + g^2 f^{abc} A^{mub} B^c f^{amn} A_\mu^m B^n = \frac{m^2}{k^2}. \quad (1.9)$$

Am demonstrat ca campul scalar rezultat din Eq. (1.9) induce un potential de tip ”confining” intre doi cuarci:

$$V(q) = -i\frac{y^2 k^2}{m^2} \delta(\vec{q})' = \int (-i\frac{y^2 k^2}{m^2}) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \delta(\vec{q})' = -\frac{y^2 k^2}{m^2} r \quad (1.10)$$

Realizarea simetriei K' in cadrul modelului standard al particulelor elementare duce la identificarea bozonului Higgs gasit la LHC cu $\frac{\alpha}{k}$ unde α este parametrul de etalonare al grupului de etalonare al interactiei electromagnetice. Pentru a fixa etalonarea trebuie sa facem o modificare a procedurii usuale si anume sa introducem o noua functionala generatoare:

$$Z[\bar{\Psi}, \Psi, A, B] = \text{const} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}A \mathcal{D}B \exp[i \int d^4x \mathcal{L}] \times \exp[-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2}] \delta(\partial^\mu \partial_\mu B + m^2 B) \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega) \quad (1.11)$$

Aceaata functionala situeaza bozonul Higgs "on-shell" cu o masa data de relatia:

$$m^2 = m_0^2 (1 - \frac{k^2 m_0^2}{g^2}) \quad (1.12)$$

Faptul ca bozonul Higgs nu poate participa decat ca stare initiala si finala intr-un proces este un rezultat important care va putea fi verificat sau respins de viitoare explorari experimentale.

B. Functia de partitie pentru o teorie scalara fara rupere spontana a simetriei intr-o noua metoda de integrare functionala

In prezent exista un anumit nivel de cunoastere care nu este complet cu privire la comportarea perturbativa a diverselor teorii, cum ar fi teoria Φ^4 sau teoriile de etalonare. De exemplu functiile beta pentru teoria Φ^4 sau pentru QED sunt cunoscute pana la ordinul cinci in timp ce pentru QCD sunt cunoscute pana la ordinul patru. Vom considera in cele ce urmeaza teoria Φ^4 ca un laborator pentru a studia o metoda de calcul functional care ulterior sa poata fi aplicata la modele mai sofisticate. Incepem cu Lagrangianul:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2}m_0^2 \Phi^2 \\ \mathcal{L}_1 &= -\frac{\lambda}{4!} \Phi^4. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Functionala generatoare dependenta de sursa externa J are expresia:

$$W[J] = \int d\Phi \exp[- \int d^4x [\frac{1}{2}(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau})^2 + \frac{1}{2}(\Delta \Phi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2 \Phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi^4 + J\Phi]] \quad (1.14)$$

si poate fi scrisa ca:

$$W[J] = \exp\left[\int d^4x \mathcal{L}_1\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)\right] W_0[J] \quad (1.15)$$

unde,

$$W_0[J] = \int d\Phi \exp\left[\int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\Phi)\right]. \quad (1.16)$$

Pentru a merge mai departe avem nevoie de urmatoarea identitate matematica:

$$\begin{aligned} I &= \int dx dy \delta(x-y) \exp[-af(x,y)] = \int dx dy dz \exp[-i(x-y)z] \exp[-af(x,y)] = \\ &\int dx dy dz \exp[-i(x-y)z - af(x,y)] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Pentru $f(x,y) = x^2y^2$ se poate forma patrutul perfect:

$$-ixz - ax^2y^2 = -(\sqrt{axy} + \frac{iz}{2\sqrt{ay}})^2 - \frac{z^2}{4ay^2}. \quad (1.18)$$

Daca introducem aceasta expresie in Eq. (1.78) obtinem:

$$I = \text{const} \int d\frac{1}{\sqrt{ay}} dz \exp\left[-\frac{z^2}{4ay^2}\right] \exp[iyz] \quad (1.19)$$

In acest fel dezvoltarea in serie in $\frac{1}{a}$ are sens si se poate scrie:

$$I = \text{const} \int dx dz \frac{1}{\sqrt{ay}} \left[1 - \frac{z^2}{4ay^2} + \dots\right] \exp[iyz] \quad (1.20)$$

Consideram functia de partitie pentru teoria Φ^4 fara surse:

$$W[0] = \int d\Phi \exp\left[i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1]\right] \quad (1.21)$$

Scriem eq. (1.21) in spatiul Minkowski ca:

$$\begin{aligned} W[0] &= \int d\Phi d\Psi \delta(\Phi - \Psi) \exp\left[i \int d^4x [\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{8} \Phi^2 \Psi^2]\right] = \\ &\text{const} \int d\Phi d\Psi dK \exp\left[i \int d^4x K(\Phi - \Psi)\right] \exp\left[i \int d^4x [\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{8} \Phi^2 \Psi^2]\right] = \\ &\text{const} \int \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\Phi dK \exp\left[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2\right] \exp\left[i \int d^4x K \Phi^2\right] \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_0\right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

Dupa anumite simplificari si calcule efectuate in spatiul Fourier pentru integrand se obtine:

$$\begin{aligned} &\text{const} \int \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\Phi dK \exp\left[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2\right] \exp\left[i \int d^4x K \Phi^2\right] \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_0\right] = \\ &= \int dK \exp\left[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2\right] \frac{1}{\det\left[\frac{K}{V^2} + \frac{1}{2V} \left[\frac{2K_0}{V} - (m_0^2 - p_n^2) \delta_{2n+1, 2n+1} + \delta_{2n+2, 2n+2}\right]\right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

In continuare se utilizeaza definitia standard a propagatorului campului scalar si rezultatele anterioare pentru a se obtine:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \Phi(x_1) \Phi(x_2) | \Omega \rangle &= \frac{\int \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\Phi dK \Phi(x_1) \Phi(x_2) \exp[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2] \exp[i \int d^4x K \Phi^2] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_0]}{\int \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\Phi dK \exp[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2] \exp[i \int d^4x K \Phi^2] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_0]} = \\ &= \frac{1}{V^2} \sum_m \exp[-ip_m(x_1 - x_2)] iV \frac{\int d\Phi dK \exp[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2] \exp[i \int d^4x K \Phi^2] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_0]}{\int d\Phi dK \exp[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2] \exp[i \int d^4x K \Phi^2] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_0]} \quad (1.24) \end{aligned}$$

Intrucat cantitatea $m^2 - k_n^2$ apare numai in determinantul Eq. (1.23) calculam:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta(m_0^2 - p_m^2)} [\det[\frac{K}{V^2} + \frac{1}{2V} [\frac{2K_0}{V} - (m_0^2 - p_n^2) \delta_{2n+1,2n+1} + \delta_{2n+2,2n+2}]]]^{-1/2} = \\ &= -\frac{1}{2} [\det[\frac{K}{V^2} - \frac{1}{2V} [\frac{2K_0}{V} - (m_0^2 - p_n^2) \delta_{2n+1,2n+1} + \delta_{2n+2,2n+2}]]]^{-1/2} \times \\ &= Tr[\frac{1}{\frac{K}{V^2} + \frac{1}{2V} [2\frac{K_0}{V} - (m_0^2 - p_n^2) (\delta_{2n+1,2n+1} + \delta_{2n+2,2n+2})]}] (-1) (\frac{1}{2V} (\delta_{2m+1,2m+1} + \delta_{2m+2,2m+2})) = \\ &= \text{const} \frac{1}{2} [\det[\frac{K}{V^2} - \frac{1}{2V} [2\frac{K_0}{V} - (m_0^2 - p_n^2) \delta_{2n+1,2n+1} + \delta_{2n+2,2n+2}]]]^{-1/2} \frac{2}{\frac{2}{V} K_0 - (m_0^2 - p_m^2)} = \\ &= \text{const} [\det[\frac{K}{V^2} - \frac{1}{2V} [2K_0 - (m_0^2 - p_n^2) \delta_{2n+1,2n+1} + \delta_{2n+2,2n+2}]]]^{-1/2} \frac{1}{\frac{2K_0}{V} - (m_0^2 - p_m^2)}. \quad (1.25) \end{aligned}$$

In Eq. (1.25) primele trei randuri sunt rezultatul diferentierii unui determinant. Primul factor in randul trei al Eq. (1.25) contine modurile Fourier ale campului K cu impulsuri diferite de zero ($p_\mu \neq 0$) pe care le numim simplu K si pe cele cu impulsuri zero $p_\mu = 0$ pe care le numim K_0 . In abordarea noastra modurile cu $p_\mu \neq 0$ sunt neimportante pentru urmatorul motiv. Consideram $K(x)$ ca o functie patrat integrabila in spatiul Hilbert care satisface:

$$\int d^4x K^2(x) = \frac{1}{V} \sum_p K(p)^2 < M, \quad (1.26)$$

unde M este o cantitate mare dar finita. Aceasta inseamna ca $\frac{K(p)}{V} < \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{V}}$ deci este o cantitate neglijabila pentru V foarte mare. In contrast $\frac{K_0}{V}$ este finita si este data de:

$$\frac{K_0}{V} = \int d^4x K(x). \quad (1.27)$$

In continuare neglijam toate modurile $p_\mu \neq 0$ si integram numai dupa modul K_0 . Un scurt calcul conduce la:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \Phi(x_1) \Phi(x_2) | \Omega \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_m \exp[-ip_m(x_1 - x_2)] iV \times \\ &\times \frac{\int dK \frac{1}{\frac{2}{V} K_0 - (m_0^2 - p_m^2)} \exp[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2] \frac{1}{\det[\frac{K}{V^2} + \frac{1}{2V} [2\frac{K_0}{V} - (m_0^2 - p_n^2) (\delta_{2n+1,2n+1} + \delta_{2n+2,2n+2})]]^{1/2}}}{\int dK \exp[i \int d^4x \frac{2}{\lambda} K^2] \frac{1}{\det[\frac{K}{V^2} + \frac{1}{2V} [\frac{2K_0}{V} - (m_0^2 - p_n^2) (\delta_{2n+1,2n+1} + \delta_{2n+2,2n+2})]]^{1/2}}} \quad (1.28) \end{aligned}$$

Facem notatiile:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} \frac{2}{V} &= ba_0 \\
m_0^2 - p_m^2 &= c^2 \\
\frac{2}{V} &= a_0 \\
\det\left[\frac{K}{V^2} + \frac{1}{2V}\left[\frac{2K_0}{V} - (m_0^2 - p_n^2)(\delta_{2n+1,2n+1} + \delta_{2n+2,2n+2})\right]\right] &= \det[a_0 K_0 + B] \quad (1.29)
\end{aligned}$$

Trebuie sa evaluam:

$$\begin{aligned}
&\frac{\int dK dK_0 \exp[2iba_0 K_0^2 + \int d^4x 2ibK^2] \frac{1}{(a_0 K_0 - c^2)[\det[a_0 K_0 + B]]^{1/2}}}{\int dK dK_0 \exp[ibK_0^2 + \int d^4x ibK^2] \frac{1}{[\det[a_0 K_0 + B]]^{1/2}}} = \\
&- \frac{1}{c^2} \frac{\int dK dK_0 \exp[2iba_0 K_0^2 + \int d^4x 2ibK^2] [1 + \frac{a_0 K_0}{c^2} + \frac{a_0^2 K_0^2}{c^4} + \dots] \frac{1}{[\det[a_0 K_0 + B]]^{1/2}}}{\int dK dK_0 \exp[ibK_0^2 + \int d^4x ibK^2] \frac{1}{[\det[a_0 K_0 + B]]^{1/2}}} \quad (1.30)
\end{aligned}$$

Pentru a determina raportul din Eq. (1.30) evaluam fiecare termen din dezvoltarea in serie din numarator:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int dK_0 dK \frac{(a_0 K_0)^n}{c^{2n}} \exp[2iba_0 K_0^2] [\exp[\int d^4x 2ibK^2] (\det[a_0 K_0 + B])^{-1/2}] = \\
&\int dK_0 dK \frac{1}{a_0} \frac{d[\frac{(a_0 K_0)^{n+1}}{c^{2n}(n+1)}]}{dK_0} \exp[2iba_0 K_0^2] [\exp[\int d^4x 2ibK^2] (\det[a_0 K_0 + B])^{-1/2}] = \\
&- \int dK_0 dK \frac{1}{a_0} \frac{(a_0 K_0)^{n+1}}{c^{2n}(n+1)} (4iba_0 K_0) \exp[2iba_0 K_0^2] \exp[\int d^4x 2ibK^2] (\det[a_0 K_0 + B])^{-1/2} - \\
&\int dK_0 dK \frac{(a_0 K_0)^{n+1}}{a_0 c^{2n}(n+1)} \exp[2iba_0 K_0^2] \sum_k [\frac{-a_0}{a_0 K_0 - c_k^2}] [\exp[\int d^4x 2ibK^2] (\det[a_0 K_0 + B])^{-1/2}] = \\
&- \frac{4ibc^4}{a_0(n+1)} I_{n+2} - \int dK dK_0 \frac{(a_0 K_0)^{n+1}}{c^{2n}(n+1)} \sum_k \frac{1}{c_k^2} [1 + \frac{a_0 K_0}{c_k^2} + \frac{(a_0 K_0)^2}{c_k^4} + \dots] \times \\
&\exp[2iba_0 K_0^2] \exp[\int d^4x 2ibK^2] (\det[a_0 K_0 + B])^{-1/2}. \quad (1.31)
\end{aligned}$$

Din Eq. (1.123) se obtine urmatoarea formula de recurenta:

$$(n+1)I_n + I_{n+2}c^4[\frac{4ib}{a_0} + \sum_k \frac{1}{c_k^4}] + I_{n+1}c^2 \sum_k \frac{1}{c_k^2} + \dots + I_{n+r}c^{2r} \sum_k \frac{1}{c_k^{2r}} + \dots = 0 \quad (1.32)$$

Se inmulteste intreaga Eq. (1.32) cu $\frac{1}{V}$, se face notatia $I_n c^{2n} = J_n$ si se obtine:

$$\frac{1}{V}(n+1)J_n + J_{n+1} \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{c_k^2} + J_{n+2}[2ib + \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{c_k^4}] + \dots = 0 \quad (1.33)$$

In cele din urma se obtine din Eqs. (1.42) si (1.33) expresia pentru propagator:

$$\begin{aligned}\text{Propagator} &= -\frac{1}{c^2} \sum_n I_n / I_0 = \\ &= -\frac{1}{c^2} \sum_n \frac{1}{c^{2n}} J_n / I_0.\end{aligned}\quad (1.34)$$

Avem nevoie de urmatoarele notatii si rezultate utile:

$$\frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{c_k^{2r}} = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{(m_0^2 - p_k^2)^r} = (-1)^r \int d^4p \frac{1}{(p^2 - m_0^2)^r} = q_r, \quad (1.35)$$

si,

$$\begin{aligned}q_1 &= i \frac{1}{16\pi^2} [\Lambda^2 - m_0^2 \ln[\frac{\Lambda^2}{m_0^2}]] \\ q_2 &= i \frac{1}{16\pi^2} [-1 + \ln[\frac{\Lambda^2}{m_0^2}]] \\ q_{n,n>2} &= i \frac{1}{16\pi^2} \frac{(m_0^2)^{2-n}}{(n-1)(n-2)}.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Expresia exacta pentru propagatorul unui camp scalar in teoria perturbatiilor este data de:

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} \quad (1.37)$$

unde m este masa fizica si $M^2(p^2)$ este "one particle irreducible self energy". In abordarea noastra propagatorul este:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2} \sum_n (-1)^n \frac{J_n}{I_0} \frac{1}{(p^2 - m_0^2)^n} \quad (1.38)$$

Dupa anumite calcule, simplificari se poate dovedi ca:

$$\frac{J_n}{I_0} \Big|_{p^2=m^2} = [m_0^2 - m^2]^n. \quad (1.39)$$

Notam,

$$X = [m_0^2 - m^2], \quad (1.40)$$

si sumam in formula de recurenta din Eq. (1.33) toti termenii cu indicii $n + k$, $k \geq 3$ pentru $p^2 = m^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k \geq 3} \frac{J_{n+k}}{I_0} q_k &= X^n \sum_k \frac{i}{16\pi^2} m_0^4 \left(\frac{X}{m_0^2}\right)^n \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} X^{n+1} [X + (m_0^2 - X) \ln[\frac{m_0^2 - X}{m_0^2}]]\end{aligned}\quad (1.41)$$

Formula de recurenta devine:

$$\begin{aligned}
(n+1)a_0X^n + q_1X^{n+1} + \left(\frac{2i}{\lambda} + q_2\right)X^{n+2} + \frac{i}{16\pi^2}X^{n+1}[X + (m_0^2 - X)\ln[\frac{m_0^2 - X}{m_0^2}]] &= 0 \\
(n+1)a_0\frac{1}{X} + q_1 + \left(\frac{2i}{\lambda} + q_2\right)X + \frac{i}{16\pi^2}[X + (m_0^2 - X)\ln[\frac{m_0^2 - X}{m_0^2}]] &= 0 \\
q_1 + \left(\frac{2i}{\lambda} + q_2\right)X + \frac{i}{16\pi^2}[X + (m_0^2 - X)\ln[\frac{m_0^2 - X}{m_0^2}]] &= 0,
\end{aligned} \tag{1.42}$$

ceea ce conduce la:

$$q_1 + (m_0^2 - m^2)\left[\frac{2i}{\lambda} + q_2\right] + \frac{i}{16\pi^2}[(m_0^2 - m^2) + m^2\ln[\frac{m^2}{m_0^2}]] = 0 \tag{1.43}$$

Eq. (1.43) determina masa fizica in functie de "bare mass" si de "cut-off scale". Pentru un "cut-off scale" mare se poate imparti Eq. (1.43) la q_1 si sa se retina numai primii doi termeni. Atunci,

$$m^2 \approx m_0^2 + \frac{q_1}{\frac{2i}{\lambda} + q_2} \approx m_0^2 + \frac{\Lambda^2 - m_0^2 \ln[\frac{\Lambda^2}{m_0^2}]}{1 + \frac{\lambda}{32\pi^2}[-1 + \ln[\frac{\Lambda^2}{m_0^2}]]} \frac{\lambda}{32\pi^2}. \tag{1.44}$$

E de mentionat ca acest rezultat conduce la acelasi coeficient de prim ordin la dimensiunea anomala a masei ca in procedurile de renormalizare standard. Urmatorii coeficienti sunt diferiti intrucat metoda utilizata constituie o procedura de renormalizare diferita.

C. Functia de partitite in teoriile de etalonare cu fermioni intr-un nou formalism functional

Cea mai simpla teorie de etalonare cu fermioni este QED cu o singura specie de fermioni, teorie care are Lagrangianul:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{1.45}$$

Scriem Eq. (1.45) in functie de modurile Fourier:

$$\begin{aligned}
\int d^4x \mathcal{L}_{QED} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu(k)[-k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})k^\mu k^\nu] A_\nu(-k) + \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\Psi(k)(\gamma^\mu k_\mu - m)\Psi(-k)] - e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(p)\gamma^\mu \Psi(-p+k) A_\nu(-k)
\end{aligned} \tag{1.46}$$

unde numaram peste modurile k positive sau negative.

Consideram expresia care contine campul de etalonare A_μ ca un termen quadratic plus un termen linear. Formam din acestia un patrat perfect si integram dupa modurile campului de etalonare A_μ :

$$\begin{aligned}
W[0] &= \int d\Psi d\bar{\Psi} dA_\mu \exp[i \int d^4x \mathcal{L}_{QED}] = \\
&\text{const} \int \prod_i \prod_j d\Psi(p_i) d\bar{\Psi}(p_j) (\det[k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu])^{-1/2} \times \\
&\exp[i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\bar{\Psi}(k)(\gamma^\mu k_\mu - m)\Psi(-k)] - \\
&\int e^2 \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [\frac{1}{4} \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu \Psi(p+k) D_{\mu\nu}^{-1} \bar{\Psi}(q) \gamma^\nu \Psi(q-k)]]]. \quad (1.47)
\end{aligned}$$

Pentru a obtine aceasta expresie se face schimbarea de variabila $A_\mu(k) \rightarrow A_\mu(k) - \frac{\bar{\Psi}(p) \gamma^\nu \Psi(-p+k)}{2D^{\mu\nu}}$ si notatia :

$$D^{\mu\nu} = -k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu, \quad (1.48)$$

unde ξ este parametrul de etalonare obisnuit. Vom integra in Eq. (1.47) prin introducerea unei noi variabile η_μ si a unei functii delta:

$$\begin{aligned}
W[0] &= \text{const} \int \prod_i \prod_j \prod_k d\bar{\Psi}(p_i) d\Psi(p_j) d\eta_\mu(p_k) (\det[k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu])^{-1/2} \delta(\eta_\mu - \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) \times \\
&\exp[i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k)(\gamma^\mu k_\mu - m)\Psi(-k) - \int \frac{e^2}{4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \eta^\mu D_{\mu\nu}^{-1} \eta^\nu]] \quad (1.49)
\end{aligned}$$

Mai departe exprimam functia delta in functie de reprezentarea ei exponentiala si obtinem:

$$\begin{aligned}
W[0] &= \text{const} \int \prod_i \prod_j \prod_k \prod_r d\bar{\Psi}(p_i) d\Psi(p_j) d\eta_\mu(p_k) dK_\mu(p_r) (\det[-i(k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu)])^{-1/2} \times \\
&\exp[i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_\mu(p)(\eta_\mu(-p) - \bar{\Psi}(q) \gamma^\mu \Psi(-q-p))] \times \\
&\exp[i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k)(\gamma^\mu k_\mu - m)\Psi(-k) - \int \frac{e^2}{4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \eta^\mu(k) D_{\mu\nu}^{-1} \eta^\nu(-k)]]]. \quad (1.50)
\end{aligned}$$

Integram peste variabila η_μ prin formarea unui patrat perfect in exponent si obtinem:

$$\begin{aligned}
W[0] &= \text{const} \int \prod_i \prod_j \prod_k d\bar{\Psi}(p_i) d\Psi(p_j) dK_\mu(p_k) (\det[-i(k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})k^\mu k^\nu)])^{-1/2} \times \\
&(\det[\frac{1}{e^2} D_{\mu\nu}])^{1/2} (\det[\frac{1}{e^2} D_{\mu\nu}])^{1/2} \exp[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2e^2} K_\mu(k) D^{\mu\nu}(k) K_\nu(-k)] \times \\
&\exp[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k) (\gamma^\mu k_\mu - m) \Psi(-k) - i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} K_\mu(k) \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu \Psi(-k + p)] = \\
&= \text{const} \int \prod_i dK_\mu(p_i) (\det[\frac{1}{2}(k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})k^\mu k^\nu)])^{-1/2} (\det[\frac{2i}{e^2} D_{\mu\nu}])^{1/2} \times \\
&\exp[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2e^2} K_\mu(k) D^{\mu\nu}(k) K_\nu(-k)] \times \det[(\gamma^\mu k_\mu - m) \delta_{m,n} - \gamma^\mu (K_\mu)_{-m-n=k}] \quad (1.51)
\end{aligned}$$

Este de mentionat ca rezultatul obtinut in Eq. (1.51) este exact acela pentru QED cu variabila A_μ inlocuita de noua variabila K_μ . Totusi procedura descrisa nu este redundanta intrucat prin pasii intermediari ne ajuta sa determinam functia beta a sarcinii electrice intr-o noua abordare.

Expresia pentru " two point function" este data de:

$$\int \prod_i \prod_j \prod_k dA_\mu(p_i) d\bar{\Psi}(p_j) d\Psi(p_k) A_\rho(p) A_\sigma(q) \exp[i \int d^4 x \mathcal{L}_{QED}] \quad (1.52)$$

Facem din nou schimbarea de variabila $A_\nu(k) \rightarrow A_\nu(k) - \frac{e}{2} \Psi(p) \frac{\gamma^\nu}{D_{\mu\nu}} \Psi(p - k)$ si obtinem:

$$\begin{aligned}
I_{\rho\sigma} &= \int \prod_i \prod_j \prod_k dA_\mu(p_i) d\bar{\Psi}(p_j) d\Psi(p_k) [A_\rho(p) A_\sigma(q) + \frac{e^2}{4} \bar{\Psi}(r) \frac{\gamma^\mu}{D_{\mu\rho}(p)} \Psi(r + p) \bar{\Psi}(u) \frac{\gamma^\nu}{D_{\nu\sigma}(q)} \Psi(u + q)] \\
&\times \exp[i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) D_{\mu\nu} A_\nu(-k) + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k) (\gamma^\mu k_\mu - m) \Psi(-k) - \\
&\int e^2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\frac{1}{4} \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu \Psi(p + k) D_{\mu\nu}^{-1} \bar{\Psi}(q) \gamma^\nu \Psi(q - k)]] , \quad (1.53)
\end{aligned}$$

Intrucat integralele peste campurile de etalonare si peste fermioni sunt separate putem

scrie:

$$\begin{aligned}
I_{\rho\sigma} = & \int \prod_i dA_\mu(p_i) [A_\rho(p) A_\sigma(q)] \exp[i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) D_{\mu\nu} A_\nu(-k)] \times \\
& \int \prod_j \prod_k d\bar{\Psi}(p_j) d\Psi(p_k) \exp[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k) (\gamma^\mu k_\mu - m) \Psi(-k) - \\
& \int e^2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\frac{1}{2} \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu \Psi(p+k) D_{\mu\nu}^{-1}(k) \bar{\Psi}(q) \gamma^\nu \Psi(q-k)]] + \\
& \int \prod_i dA_\mu(p_i) \exp[i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) D_{\mu\nu} A_\nu(-k)] \times \\
& \int \prod_j \prod_k d\bar{\Psi}(p_j) d\Psi(p_k) [\frac{e^2}{4} \bar{\Psi}(r) \frac{\gamma^\mu}{D_{\mu\rho}(p)} \Psi(r+p) \bar{\Psi}(u) \frac{\gamma^\nu}{D_{\nu\sigma}(q)} \Psi(u+q)] \times \\
& \exp[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k) (\gamma^\mu k_\mu - m) \Psi(-k) - \\
& \int e^2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\frac{1}{2} \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu \Psi(p+k) D_{\mu\nu}^{-1} \bar{\Psi}(q) \gamma^\nu \Psi(q-k)]] \quad (1.54)
\end{aligned}$$

Primul termen in Eq. (1.54) poate fi separat ceea ce conduce la:

$$\begin{aligned}
& \int \prod_i dA_\mu(p_i) [A^\rho(k) A^\sigma(q)] \exp[i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) D_{\mu\nu} A_\nu(-k)] = \\
& \delta(k-q) \frac{i\xi}{2} \frac{\delta^2}{\delta k_\rho \delta k_\sigma} (\det[i(-k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu])^{-1} = \\
& \frac{-i}{k^2} (g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2}) (\det[i(-k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu])^{-1}, \quad (1.55)
\end{aligned}$$

ceea ce corespunde propagatorului campului de etalonare liber in etalonarea Landau.

Aici trebuie sa clarificam un punct. Operatorul quadratic kinetic care apare in Lagrangian este singular asa incat trebuie sa introducem parametrul de etalonare pentru consistenta. Vom lucra in etalonarea cu $\xi = 0$. Atunci,

$$\begin{aligned}
& i\xi \frac{\partial^2}{\partial k_\rho \partial k_\sigma} i(-k^2 A_\mu(k) A^\mu(-k) + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu A_\mu(k) A_\nu(-k)) = \\
& \xi [-2g^{\rho\sigma} A_\mu(k) A^\mu(-k) + 2(1 - \frac{1}{\xi}) A^\rho(k) A^\sigma(-k)] = A^\rho(k) A^\sigma(-k), \quad (1.56)
\end{aligned}$$

in limita $\xi = 0$.

Operatorul $D_{\mu\nu}$ satisface ecuatia:

$$[-k^2 g^{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu] \tilde{D}^{\nu\rho} = i\delta_\mu^\rho, \quad (1.57)$$

unde $\tilde{D}^{\nu\rho}$ este operatorul invers:

$$\tilde{D}^{\nu\rho} = \frac{-i}{k^2} (g^{\nu\rho} - (1 - \xi) \frac{k^\nu k^\rho}{k^2}). \quad (1.58)$$

Se obtine in continuare:

$$\frac{\xi}{2} \frac{\delta^2}{\delta k^\rho \delta k^\sigma} \frac{1}{D_{\mu\nu}} = \frac{1}{D_{\mu\sigma} D_{\nu\rho}}. \quad (1.59)$$

de asemenea in etalonarea Landau. Aici sunt si alti termeni pe care ii ignoram pentru ca nu corespund diagramelor "one particle irreducible".

Mai departe calculam:

$$\begin{aligned} & \int \prod_i \prod_j d\bar{\Psi}(p_i) d\Psi(p_j) \left[\frac{e^2}{4} \bar{\Psi}(r) \frac{\gamma^\mu}{D_{\mu\rho}(p)} \Psi(r+p) \bar{\Psi}(s) \frac{\gamma^\nu}{D_{\nu\sigma}(q)} \Psi(s+q) \right] \times \\ & \exp \left[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k) (\gamma^\mu k_\mu - m) \Psi(-k) - \int e^2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu \Psi(p+k) D_{\mu\nu}^{-1} \bar{\Psi}(q) \gamma^\nu \Psi(q-k) \right] \right] \\ & = \frac{i\xi}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} \int \prod_i \prod_j d\bar{\Psi}(p_i) d\Psi(p_j) \exp \left[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k) (\gamma^\mu k_\mu - m) \Psi(-k) - \right. \\ & \left. \int e^2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu \Psi(p+k) D_{\mu\nu}^{-1} \bar{\Psi}(q) \gamma^\nu \Psi(q-k) \right] \right], \end{aligned} \quad (1)$$

si observam ca trebuie sa consideram cantitatea:

$$\begin{aligned} & \frac{i\xi}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} \text{const} \int \prod_i dK_\mu(p_i) (\det[\frac{2i}{e^2} D_{\mu\nu}])^{1/2} (\det[iD_{\mu\nu}])^{-1/2} \times \\ & \exp \left[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2e^2} K_\mu(k) D^{\mu\nu} K_\nu(-k) \right] \det[(\gamma^\mu p_\mu - m) \delta_{mn} - \gamma^\mu (K_\mu)_{-m-n=k}] = (\det[\frac{2}{e^2}])^{1/2} \times \\ & \frac{i\xi}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} \exp \left[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2e^2} K_\mu(k) D^{\mu\nu}(k) K_\nu(-k) \right] \det[(\gamma^\mu p_\mu - m) \delta_{mn} - \gamma^\mu (K_\mu)_{-m-n=k}], \end{aligned} \quad (1.61)$$

Apoi facem schimbarea de variabila $\frac{K_\mu}{e} \rightarrow K_\mu$ si obtinem:

$$I_{\rho\sigma} \approx \frac{i\xi}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} \int dK_\mu \exp \left[i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} K_\mu(k) D^{\mu\nu} K_\nu(-k) \right] \det[(\gamma^\mu p_\mu - m) \delta_{mn} - e \gamma^\mu (K_\mu)_{-m-n=k}] \quad (1.62)$$

Introducem operatorul,

$$O_{\alpha\mu} = \sqrt{\frac{i}{2k^2}} [k^2 g^{\mu\alpha} - (1 - \frac{1}{\sqrt{\xi}}) k^\mu k^\alpha] \quad (1.63)$$

care satisface relatia,

$$O_{\alpha\mu} O_\nu^\alpha = -\frac{i}{2} D_{\mu\nu}. \quad (1.64)$$

Facem din nou o schimbare de variabila:

$$K'_\mu = K_\alpha O_\mu^\alpha. \quad (1.65)$$

care conduce la:

$$I_{\rho\sigma} = \text{const} \frac{i\xi}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} \int \prod_i dK_\mu(p_i) (\det[i(k^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})k^\mu k^\nu])^{-1} \exp[-\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} K_\mu(k) K_\nu(-k)] \times \det[(\gamma^\mu p_\mu - m)\delta_{mn} - \gamma^\mu e(K_\alpha)_{-m-n=k}(O_\mu^\alpha)^{-1}]. \quad (1.66)$$

Prima contributie vine de la:

$$\begin{aligned} & \frac{i\xi}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} \det[k^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})k^\mu k^\nu]^{-1} = \\ & -i \frac{1}{k^2} (g^{\rho\sigma} - (1 - \xi) \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2}) \det[i(k^2 g^{\nu\mu} - (1 - \frac{1}{\xi})k^\mu k^\nu)]^{-1} \end{aligned} \quad (1.67)$$

care este propgatorul campului liber. Pe langa aceasta urmatoarea contributie vine de la un termen de tipul:

$$\frac{\partial}{\partial k^\rho} (\det[k^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})k^\mu k^\nu]^{-1}) \frac{\partial}{\partial k^\sigma} \det[(\gamma^\mu p_\mu - m)\delta_{mn} - e\gamma^\mu (K_\alpha)_{-m-n=k}(O_\mu^\alpha)^{-1}] \quad (1.68)$$

care este zero in limita $\xi = 0$ dupa ce se face din nou schimbarea de variabila $K_\alpha \rightarrow -2i\partial_\alpha^\mu K_\mu$.

Urmatoarea contributie este:

$$\frac{i\xi}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} \det[(\gamma^\mu p_\mu - m)\delta_{mn} - e\gamma^\mu (K_\alpha)_{-m-n=k}(O_\mu^\alpha)^{-1}] \quad (1.69)$$

In continuare pentru a determina functia beta avem nevoie de formula de diferentiere a unui determinant.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} \det A = \frac{1}{2} \det A \text{Tr}[\frac{\partial A}{\partial k^\rho} A^{-1}] \text{Tr}[\frac{\partial A}{\partial k^\sigma} A^{-1}] + \\ & \frac{1}{2} \det A \text{Tr}[\frac{\partial^2 A}{\partial k^\rho \partial k^\sigma} A^{-1}] - \frac{1}{2} \det A \text{Tr}[\frac{\partial A}{\partial k^\rho} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial k^\sigma} A^{-1}]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

unde,

$$A = [(\gamma^\mu p_\mu - m)\delta_{mn} - e\gamma^\mu (K_\alpha)_{-m-n=k}(O_\mu^\alpha)^{-1}]. \quad (1.71)$$

Pentru a determina renormalizarea sarcinii data de $\frac{1}{1-\Pi(0)}$ si in consecinta functia beta trebuie sa calculam doi termeni:

$$\begin{aligned} & -i\xi \frac{1}{2} \det A \text{Tr}[\frac{\partial A}{\partial k^\rho} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial k^\sigma} A^{-1}] \\ & i\xi \frac{1}{2} \det A \text{Tr}[\frac{\partial A}{\partial k^\rho} A^{-1}] \text{Tr}[\frac{\partial A}{\partial k^\sigma} A^{-1}], \end{aligned} \quad (1.72)$$

unde primul termen corespunde contributiei "one loop" si al doilea contributiei "two loops". Functia beta se opreste la "two loops".

Pentru a determina termeni de tipul $\frac{\delta A}{\delta k^\rho}$ mentionam ca prezenta factorului ξ in fata inseamna ca trebuie sa calculam numai contributiile proportionale cu $\frac{1}{\xi}$:

$$\frac{\delta A}{\delta k_\rho} = eK_\alpha \sqrt{\frac{2k^2}{i}} (1 - \sqrt{\xi}) \frac{1}{k^2} (g^{\mu\rho} \frac{k^\alpha}{k^2} + g^{\alpha\rho} \frac{k^\mu}{k^2}) \quad (1.73)$$

Apoi facem un nou schimb de variabile: $K^\alpha = K'_\nu \frac{k^2 g^{\nu\alpha} - (1 - \frac{1}{\sqrt{\xi}}) k^\nu k^\alpha}{\sqrt{k^2}}$ si determinam:

$$eK_\alpha \sqrt{\frac{2k^2}{i}} (1 - \sqrt{\xi}) \frac{1}{k^2} (g^{\mu\rho} \frac{k^\alpha}{k^2} + g^{\alpha\rho} \frac{k^\mu}{k^2}) \rightarrow e \sqrt{\frac{2}{i}} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\xi}} K'_\nu k^\nu g^{\mu\rho} \quad (1.74)$$

unde consideram doar termenul proportional cu $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$.

Prima contributie in Eq. (1.76) este obtinuta astfel,

$$\begin{aligned} & -i\xi \frac{1}{2} \det A \text{Tr} \left[\frac{\partial A}{\partial k^\rho} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial k^\sigma} A^{-1} \right] = \\ & -\frac{i}{2(k^2)^2} \frac{2}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} \text{Tr} e^2 [k^\alpha K_\alpha k^\beta K_\beta \gamma^\rho (\gamma^\tau p_\tau + m) \gamma^\sigma (\gamma^\eta p_\eta + m)] = \\ & = -ig^{\rho\sigma} \frac{1}{k^2} \frac{2}{64\pi^2} [-\Lambda^2 + 4m^2 \ln[\frac{\Lambda^2}{m^2}]] K_\mu^2 e^2. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Rezultatul trebuie impartit la functia de partitie ceea ce conduce la:

$$-e^2 \frac{2}{64\pi^2} [\Lambda^2 - 4m^2 \ln[\frac{\Lambda^2}{m^2}]] \frac{\int dK_\mu K_\mu^2}{\int dK_\mu} = -e^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{3} [1 - 4 \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln[\frac{\Lambda^2}{m^2}]], \quad (1.76)$$

unde integrala peste variabila K este realizata in coordonate sferice in spatiul euclideean cu un "cut-off" Λ .

Termenul "two loop" este calculat astfel:

$$i\xi \frac{1}{2} \det A \text{Tr} \left[\frac{\partial A}{\partial k^\rho} A^{-1} \right] \text{Tr} \left[\frac{\partial A}{\partial k^\sigma} A^{-1} \right] = ig^{\rho\sigma} \frac{1}{k^2} \frac{1}{3} \frac{1}{64\pi^4} (-\Lambda^2 + 3m^2 \ln[\frac{\Lambda^2}{m^2}])^2 (K_\mu^2)^2 \quad (1.77)$$

Ecuatia de mai sus se imparte la functia de partitie si se obtine:

$$-e^4 \frac{1}{64\pi^4} (-\Lambda^2 + 3m^2 \ln[\frac{\Lambda^2}{m^2}])^2 \frac{\int dK_\mu (K_\mu^2)^2}{\int dK_\mu} = -e^4 \frac{1}{64\pi^4} (-1 + 3 \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln[\frac{\Lambda^2}{m^2}])^2 \frac{1}{2}. \quad (1.78)$$

In final rezulta functia beta pentru sarcina electrica:

$$\beta(\alpha) = \frac{\partial(\frac{\alpha}{\pi})}{\partial \ln[M^2]} = \frac{1}{3} (\frac{\alpha}{\pi})^2 + \frac{1}{4} (\frac{\alpha}{\pi})^4, \quad (1.79)$$

si are numai primii doi coeficienti diferiti de zero ceea ce corespunde la renormalizarea 't Hooft intr-o noua abordare functionala.

D. Functia de partitite in teoriile de etalonare cu interactie tare intr-un nou formalism functional

Urmatorul Lagrangian pe care il vom studia este Lagrangianul Yang Mills:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2, \quad (1.80)$$

unde,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.81)$$

Lagrangianul din Eq. (1.115) este fixat prin introducerea Lagrangianului "ghost":

$$\mathcal{L}_g = \bar{c}^a (-\partial^\mu \partial_\mu - g f^{abc} \partial^\mu A_\mu^b) c^c. \quad (1.82)$$

Vom lucra in etalonarea Feynman ($\xi = 1$) si in spatiul Fourier. Utilizand,

$$A_\mu^a(x) = \frac{1}{V} \sum_n \exp[-ik_n x] A_\mu^a(k_n), \quad (1.83)$$

Lagrangianul poate fi rescris ca:

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \frac{1}{V} \sum_n k_n^2 A^{\alpha\nu}(k_n) A_\nu^a(-k_n) + \frac{1}{V} \sum_n k_n^2 \bar{c}^a(k_n) c^a(-k_n) + \\ & + \frac{i}{V^2} \sum_{n,m} k_n^\mu A_\nu^a(k_n) f^{abc} A_\mu^b(k_m) A^{c\nu}(-k_n - k_m) - \\ & - \frac{1}{V^3} f^{abc} f^{ade} \sum_{n,m,p} A^{b\mu}(k_n) A^{c\nu}(k_m) A_\mu^d(k_p) A_\nu^e(-k_n - k_m - k_p) - \\ & - \frac{i}{V^2} \sum_{n,m} k_n^\mu \bar{c}^a(k_n) g f^{abc} A_\mu^b(k_m) c^c(-k_n - k_m). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Functia de partitie este definita de:

$$Z_0 = \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) \exp[i \int d^4x \mathcal{L}], \quad (1.85)$$

unde in exponent trebuie utilizata Eq. (1.119).

Aceasta poate fi rescrisa ca:

$$Z_0 = \text{factor} \times \exp\left[\sum_i V_i\right] \quad (1.86)$$

unde V_i este o diagrama tipica "disconnected". Toate diagramele V_i diagrams sunt inchise si nu depind de impulsuri. Factorul din fata este un produs obtinut prin inegrarea integralelor

de tip "gaussian" care corespund termenilor cinetici. Asadar expresia completa pentru functia de partitie este:

$$Z_0 = \text{const} \prod_i (k_i^2)^{N^2-1} \prod_j (k_j^2)^{-d/2(N^2-1)} \exp\left[\sum_i V_i\right] \quad (1.87)$$

unde N vine de la grupul Yang Mills $SU(N)$.

Mai departe calculam:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] = \\ &= \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) \frac{dA_\nu^a(k)}{dA_\nu^a(k)} \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] = \\ &= \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) \frac{d}{dA_\nu^a(k)} [A_\nu^a(k) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right]] - \\ &- \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) A_\nu^a(k) \frac{d}{dA_\nu^a(k)} \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right]. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Mai intai analizam primul termen dupa semnul egal din Eq. (1.123). Obtinem:

$$\begin{aligned} &\int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) A_\nu^a(k) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right]_{A_\nu^a(k)=+\infty} - \\ &\int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) A_\nu^a(k) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right]_{A_\nu^a(k)=-\infty}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Factorul exponential in Eq. (1.124) va contine:

$$\exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] \sim \text{other factors} \times \exp\left[-\frac{i}{2} k^2 A^{\alpha\nu}(k) A_\nu^a(k)\right] \quad (1.90)$$

Cantitatea k^2 trebuie de fapt sa fie scrisa ca $k^2 + i\epsilon$ unde ϵ asigura convergenta integralei gaussiene. Atunci se obtine:

$$\lim_{A_\nu^a(k) \rightarrow \pm\infty} A_\nu^a(k) \exp\left[-\frac{i}{2} k^2 A^{\alpha\nu}(k) A_\nu^a(k) - \frac{\epsilon}{2} A_{\alpha\nu}(k) A_\nu^a(k)\right] = 0 \quad (1.91)$$

Asadar prima contributie dupa semnul egal in Eq. (1.123) este zero. Urmatoarea contributie este:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) (-i) \left[-\frac{k^2}{V} A^{\alpha\nu}(k) A_\nu^a(-k) + \right. \\ &\frac{3i}{V^2} g^{\mu\nu} \sum_p f^{abc} A_\nu^a(k) A_\mu^b(p) A^{\nu\mu}(-k-p) - \frac{i}{V^2} g \sum_p p^\nu \bar{c}^b(p) f^{bac} A_\nu^a(k) c^c(-p-k) - \\ &\left. - \frac{1}{V^3} g^2 f^{bac} f^{bde} \sum_{p,q} A_\nu^a(k) A_\mu^c(p) A^{d\nu}(q) A^{\mu\epsilon}(-p-k-q)\right] \times \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right]. \end{aligned} \quad (1.92)$$

In conformitate cu Eq. (1.186) se poate scrie:

$$k^\mu \frac{dZ_0}{dk^\mu} = -2(N^2 - 1) \left[\frac{d}{2} - 1 \right] Z_0 \quad (1.93)$$

Aplicam operatorul $k^\mu \frac{d}{dk^\mu}$ ecuatiei Eq. (1.176) si obtinem:

$$\begin{aligned} k^\mu \frac{dZ_0}{dk^\mu} = & \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) \times \\ & i \left[-\frac{1}{V} k^2 A^{\nu\mu}(k) A_\nu^a(-k) + \frac{2}{V} k^2 \bar{c}^a(k) c^a(-k) + \frac{i}{V^2} k^\mu \sum_p A_\nu^a(k) f^{abc} g A_\mu^b(p) A^{c\nu}(-p-k) - \right. \\ & \left. - \frac{i}{V^2} \sum_p k^\mu \bar{c}^a(k) g f^{abc} A_\mu^b(p) c^c(-p-k) \right] \times \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Urmatorul pas este sa consideram Lagrangianul Yang Mills din perspectiva renormalizarii ceea ce conduce la:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r = & -\frac{1}{2} \frac{1}{V} Z_3 \sum_n k_n^2 A^{\nu\mu}(k_n) A_\nu^a(-k_n) + \frac{1}{V} Z_2 \sum_n k_n^2 \bar{c}^a(k_n) c^a(-k_n) + \\ & + \frac{i}{V^2} Z_{3g} \sum_{n,m} k_n^\mu A_\nu^a(k_n) f^{abc} A_\mu^b(k_m) A^{c\nu}(-k_n - k_m) - \\ & - \frac{1}{V^3} Z_{4g} g^2 f^{abc} f^{ade} \sum_{n,m,p} A^{b\mu}(k_n) A^{c\nu}(k_m) A_\mu^d(k_p) A_\nu^e(-k_n - k_m - k_p) - \\ & - \frac{i}{V^2} Z'_1 \sum_{n,m} k_n^\mu \bar{c}^a(k_n) g f^{abc} A_\mu^b(k_m) c^c(-k_n - k_m). \end{aligned} \quad (1.95)$$

Aici campurile de etalonare si cuplajele trebuie considerate renormalizate si constantele de renormalizare satisfac identitatile Slanov-Taylor:

$$g_0^2 = \frac{Z_{3g}^2}{Z_3^3} g^2 \mu^\epsilon = \frac{Z_{4g}}{Z_3^2} g^2 \mu^\epsilon = \frac{Z_1'^2}{Z_2'^2 Z_3} g^2 \mu^\epsilon, \quad (1.96)$$

unde $d = 4 - \epsilon$ si μ este un parametru cu dimensiunea de masa.

In metoda "background gauge field" care consta in separarea campului de etalonare A_μ^a intr-un "background" camp de etalonare B_μ^a si o fluctuatie cuantica $\tilde{A}_\mu^a$ se obtin relatii mai simple intre constantele de renormalizare:

$$\begin{aligned} Z_{4g} &= Z_{3g} = Z_3 \\ Z_2 &= Z_1' \\ Z_g &= Z_3^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Aplicare la Lagrangianul renormalizat Eqs.(1.125) si (1.129) vor deveni:

$$\begin{aligned}
Z_0 = & \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) (-i) \left[-\frac{k^2}{V} Z_3 A^{\mu\nu}(k) A_\nu^a(-k) + \right. \\
& \frac{3i}{V^2} Z_{3g} g k^\mu \sum_p f^{abc} A_\nu^a(k) A_\mu^b(p) A^{c\nu}(-k-p) - \frac{i}{V^2} g Z'_1 \sum_p p^\nu \bar{c}^b(p) f^{bac} A_\nu^a(k) c^c(-p-k) - \\
& \left. -\frac{1}{V^3} g^2 Z_{4g} f^{bac} f^{bde} \sum_{p,q} A_\nu^a(k) A_\mu^c(p) A^{d\nu}(q) A^{e\mu}(-p-k-q) \right] \times \exp[i \int d^4x \mathcal{L}], \quad (1.98)
\end{aligned}$$

si

$$\begin{aligned}
-2(N^2 - 1) \left[\frac{d}{2} - 1 \right] Z_0 = & \int \prod_i \prod_j \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) \times \\
& i \left[-\frac{1}{V} Z_3 k^2 A^{\mu\nu}(k) A_\nu^a(-k) + \frac{2}{V} Z_2 k^2 \bar{c}^a(k) c^a(-k) + \frac{i}{V^2} k^\mu Z_{3g} \sum_p A_\nu^a(k) f^{abc} g A_\mu^b(p) A^{c\nu}(-p-k) - \right. \\
& \left. -\frac{i}{V^2} Z'_1 \sum_p k^\mu \bar{c}^a(k) g f^{abc} A_\mu^b(p) c^c(-p-k) \right] \times \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \quad (1.99)
\end{aligned}$$

Aplicam formula de reductie LSZ ecuatiilor (1.98) si (1.99) si obtinem:

$$\begin{aligned}
1 = & a_1 Z_3 + a_2 g Z_{3g} \sum_p k^\mu \frac{1}{k^2 p^2 (p+k)^2} f^{abc} \langle \vec{k}, \epsilon_{a,\nu}; \vec{p}, \epsilon_{b,\mu} | S | \overrightarrow{p+k}, \epsilon_{c,\nu} \rangle + \\
& + a_2 g Z'_1 \sum_p p^\mu \frac{1}{p^2 k^2 (p+k)^2} f^{abc} \langle \vec{p}, a; \vec{k}, \epsilon_{b,\mu} | S | \overrightarrow{p+k}, c \rangle + \\
& + a_3 g^2 Z_{4g} f^{bac} f^{bde} \langle \vec{k}, \epsilon_{a,\nu}; \vec{p}, \epsilon_{c,\mu} | S | -\vec{q}, \epsilon_{d,\nu}; \overrightarrow{k+p+q}, \epsilon_{e,\mu} \rangle, \quad (1.100)
\end{aligned}$$

si,

$$\begin{aligned}
-2(N^2 - 1) \left(\frac{d}{2} - 1 \right) = & b_1 Z_3 + b_2 Z'_2 + b_3 Z_{3g} \sum_p k^\mu \frac{1}{k^2 p^2 (p+k)^2} f^{abc} \langle \vec{k}, \epsilon_{a,\nu}; \vec{p}, \epsilon_{b,\mu} | S | \overrightarrow{p+k}, \epsilon_{c,\nu} \rangle + \\
& b_4 g Z'_1 \sum_p k^\mu \frac{1}{p^2 k^2 (p+k)^2} f^{abc} \langle \vec{k}, a; \vec{p}, \epsilon_{b,\mu} | S | \overrightarrow{p+k}, c \rangle. \quad (1.101)
\end{aligned}$$

Eqs. (1.100) and (1.101) contin relatii intre constantele de renormalizare si functiile "two", "three" si "four point". Utilizand,

$$\begin{aligned}
a_2 g Z_{3g} g \sum_p k^\mu \frac{1}{k^2 p^2 (p+k)^2} f^{abc} \langle \vec{k}, \epsilon_{a,\nu}; \vec{p}, \epsilon_{b,\mu} | S | \overrightarrow{p+k}, \epsilon_{c,\nu} \rangle = \\
a_2 Z_{3g} g \sum_p k^2 \frac{1}{k^2 p^2 (p+k)^2} f^{abc} f^{abc} \Gamma(p, k, -(p+k)) + \quad (1.102)
\end{aligned}$$

si faptul ca p^2 , k^2 , pk sunt "on-shell" se obtine:

$$\begin{aligned}
a_2 Z_{3g} \sum_p k^2 \frac{1}{k^2 p^2 (p+k)^2} f^{abc} f^{abc} \Gamma(p, k, -(p+k)) = a_2 Z_{3g} \sum_p \frac{1}{p^2 (p+k)^2} \text{const} g^2 = \\
a_2 Z_{3g} g^2 \text{const} \frac{(p^2)^2}{p(k+p)^2} = b Z_{3g} g^2 \quad (1.103)
\end{aligned}$$

Aplicand aceeaasi procedura ecuatiilor (1.100) si (1.101) se obtine:

$$1 = aZ_2 + bZ_{3g}g^2 + cZ_1'^2g^2 + dZ_{4g}g^4, \quad (1.104)$$

si

$$x = yZ_3 + zZ_2 + uZ_{3g}g^2 + wZ_1'g^2. \quad (1.105)$$

Aici $a, b, c, d, x, y, z, u, w$ sunt constante independente de constanta de cuplaj dar care raman nedeterminate.

Prin acelasi procedeu aplicat campurilor "ghost" se obtine usor o noua relatie:

$$r_1 = r_2Z_2 + r_3Z_1'g^2, \quad (1.106)$$

unde r_1, r_2 si r_3 sunt constante independente de constanta de cuplaj dar care raman nedeterminate.

In abordarea standard nu se pot determina constantele de renormalizare din ecuatiile (1.104), (1.105) si (1.106) intrucat avem trei ecuatii si cinci constante de renormalizare. In metoda "background gauge field" lucrurile se simplifica si ecuatiile (1.104), (1.105) si (1.106) conduc la:

$$\begin{aligned} 1 &= (f_1 + f_2g^2 + f_3g^4)Z_3 + f_4Z_2g^2 \\ 1 &= (h_1 + h_2g^2)Z_3 + h_4Z_2g^2 \\ 1 &= (c_1 + c_2g^2)Z_2 \end{aligned} \quad (1.107)$$

unde f_i, h_i si c_i sunt constante, unele din ele divergente. De aici se determina o formula pentru Z_3 si o conditie de consistenta:

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{c_1 + (c_2 - h_4)g^2}{(c_1 + c_2g^2)(h_1 + h_2g^2)} \\ \frac{c_1 + (c_2 - h_4)g^2}{h_1 + h_2g^2} &= \frac{c_1 + (c_2 - f_4)g^2}{f_1 + f_2g^2 + f_3g^4} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Din a doua ecuatie se determina printre altele $c_2 = h_4$ si din prima Z_3 :

$$Z_3 = \frac{1}{1 + d_1g^2 + d_2g^4}, \quad (1.109)$$

unde $d_1 = h_2 + h_1c_2/c_1$, $d_2 = c_2/c_1h_2$ si $h_1 = 1$.

Vom utiliza dezvoltarea in serie a constantei de renormalizare Z_3 in functie de parametrul de regularizare dimensionala $\frac{1}{\epsilon}$ desi procedura noastra de renormalizare nu este identica cu renormalizarea dimensionala:

$$Z_1 = 1 + \frac{Z_3^{(1)}}{\epsilon} + \frac{Z_3^{(2)}}{\epsilon^2} + \dots \quad (1.110)$$

Coeficientii d_1 si d_2 sunt divergenti si pot fi dezvoltati in serie in functie de $\frac{1}{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{d_{(1)}}{\epsilon} + \frac{d_1^{(2)}}{\epsilon^2} + \dots \\ d_2 &= \frac{d_2^{(2)}}{\epsilon} + \frac{d_2^{(2)}}{\epsilon^2} + \dots \end{aligned} \quad (1.111)$$

Aplicand Eqs. (1.110) si (1.111) ecuatiei (1.180) se obtine:

$$Z_1^{(1)} = -d_1^{(1)}g^2 - d_2^{(1)}g^4 \quad (1.112)$$

Functia beta este definita ca:

$$\beta = \mu^2 \frac{dg^2}{d\mu^2} = -g^4 \frac{\partial Z_3^{(1)}}{\partial g^2} = g^4(d_1^{(1)} + g^2 d_2^{(2)}) \quad (1.113)$$

Intrucat primii doi coeficienti sunt universali functia beta este determinata complet si core-spunde schemei't Hooft. Coeficientii $d_1^{(1)}$ si $d_2^{(1)}$ sunt identificati cu:

$$\begin{aligned} d_1^{(1)} &= -\frac{11}{3}N \frac{1}{(4\pi)^2} \\ d_2^{(1)} &= -\frac{34}{3}N^2 \frac{1}{(4\pi)^4}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

E. Functia beta la ordine mai mari sau la toate ordinele pentru teoriile de etalonare nonabeliane cu fermioni.

Dependenta constantei de cuplaj de scala este calculata in general in teoriile cuantice de camp prin utilizarea unor metode perturbative care consta in dezvoltarea in serie intr-un parametru mic. In metoda de regularizare dimensionala functia beta este cunoscuta in QCD pana la ordinul patru iar pentru QED pana la ordinul cinci. Se stie ca coeficientii primelor doua ordine nu depind de schema de renormalizare in timp ce restul coeficientilor sunt dependenti de ea. In schema de renormalizare 't Hooft functia beta se opreste la primele doua ordine.

In aceasta subsectiune vom extinde o metoda elaborate anterior la cazul mai complicat al functiei beta pentru QCD cu un numar arbitrar de specii de fermioni.

Incepem cu Lagrangianul pentru o teorie de etalonare $SU(N)$ cu N_f fermions in reprezentarea fundamentala:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{c}^a(-\partial^\mu\partial_\mu - g f^{abc}\partial^\mu A_\mu^b)c^c + \sum_f \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)\Psi, \quad (1.115)$$

unde,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.116)$$

si,

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a t^a. \quad (1.117)$$

Aici t^a este generatorul grupului $SU(N)$ in reprezentarea fundamentala. Vom lucra in etalonarea Feynman ($\xi = 1$). Toate campurile pot fi exprimate in spatiul Fourier:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &= \frac{1}{V} \sum_n \exp[-ik_n x] A_\mu^a(k_n) \\ \Psi(x) &= \frac{1}{V} \sum_m \exp[-ik_m x] \Psi(k_m) \\ c^b(x) &= \frac{1}{V} \sum_p \exp[-ik_p x] c^b(k_p). \end{aligned} \quad (1.118)$$

In acest context Lagrangianul devine:

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{V} \sum_n k_n^2 A^{\mu\nu}(k_n) A_\nu^a(-k_n) + \frac{1}{V} \sum_n k_n^2 \bar{c}^a(k_n) c^a(-k_n) + \\ &+ \frac{i}{V^2} g \sum_{n,m} k_n^\mu A_\nu^a(k_n) f^{abc} A_\mu^b(k_m) A^{\nu c}(-k_n - k_m) - \\ &- \frac{1}{V^3} g^2 f^{abc} f^{ade} \sum_{n,m,p} A^{b\mu}(k_n) A^{c\nu}(k_m) A_\mu^d(k_p) A_\nu^e(-k_n - k_m - k_p) - \\ &- \frac{i}{V^2} \sum_{n,m} k_n^\mu \bar{c}^a(k_n) g f^{abc} A_\mu^b(k_m) c^c(-k_n - k_m) + \\ &+ \frac{1}{V} \sum_f \sum_n \bar{\Psi}_f(k_n) \gamma^\mu k_{\mu n} \Psi_f(k_n) + \frac{1}{V^2} g \sum_f \sum_{n,m} \bar{\Psi}_f(k_n) \gamma^\mu A_\mu^a(k_n - k_m) t^a \Psi_f(k_m) \end{aligned} \quad (1.119)$$

Functia de partitie pentru Lagrangianul de mai sus are forma:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \prod_i \prod_j \prod_m \prod_{fl} \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \times \\ &\exp[i \int d^4x \mathcal{L}], \end{aligned} \quad (1.120)$$

unde exponentul este considerat in spatiul Fourier.

Este cunoscut faptul ca Z_0 abstractie facand de un factor in fata este dat de exponentiala sumei tuturor diagramelor neconectate:

$$Z_0 = \text{factor} \times \exp\left[\sum_i V_i\right] \quad (1.121)$$

unde V_i este o diagrama tipica neconectata. Factorul din fata este un produs obtinut prin integrarea integralelor gaussiene care corespund termenilor kinetici. Asadar functia de partitie are expresia:

$$Z_0 = \text{const} \prod_i (k_i^2)^{N^2-1} \prod_j (k_j^2)^{-d/2(N^2-1)} \prod_p [\det(\gamma^\mu p_\mu - m)]^{N_f N} \exp\left[\sum_i V_i\right] \quad (1.122)$$

unde primul factor corespunde campurilor "ghosts", al doilea campurilor gluonice si al treilea campurilor fermionice.

Consideram mai intai functia de partitie din Eq. (1.176) si introducem in integrand cantitatea $\frac{dA_\nu^a(k)}{dA_\nu^a(k)}$ ceea ce conduce la relatia:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_n \prod_p \prod_m dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] = \\ &= \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \frac{dA_\nu^a(k)}{dA_\nu^a(k)} \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] = \\ &= \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \frac{d}{dA_\nu^a(k)} [A_\nu^a(k) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right]] - \\ &\quad - \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) A_\nu^a(k) \times \\ &\quad \frac{d}{dA_\nu^a(k)} \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right], \end{aligned} \quad (1.123)$$

unde $\prod_{fl}$ contine produse separate dupa speciile si culorile fermionilor.

Primul termen din partea dreapta al Eq. (1.123),

$$\begin{aligned} & \left[\int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^d(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_f(k_n) d\Psi(k_p) A_\nu^a(k) \times \right. \\ & \left. \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] \right]_{A_\nu^a(k)=+\infty} - \\ & \left[\int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^d(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_f(k_n) d\Psi(k_p) A_\nu^a(k) \times \right. \\ & \left. \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] \right]_{A_\nu^a(k)=-\infty}, \end{aligned} \quad (1.124)$$

este zero intrucat termenul kinetic care contine ϵ conduce la o exponentiala care tinde la zero. Aici produsul satisface constrangerea: $A_\mu^d(k_i) \neq A_\mu^a(k)$.

A doua contributie conduce la urmatorul rezultat:

$$\begin{aligned}
Z_0 = & \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) (-i) \left[-\frac{k^2}{V} A^{\nu}(k) A_\nu^a(-k) + \right. \\
& \frac{3i}{V^2} g k^\mu \sum_p f^{abc} A_\nu^a(k) A_\mu^b(p) A^{c\nu}(-k-p) - \frac{i}{V^2} g \sum_p p^\nu \bar{c}^b(p) f^{bac} A_\nu^a(k) c^c(-p-k) - \\
& \left. -\frac{1}{V^3} g^2 f^{bac} f^{bde} \sum_{p,q} A_\nu^a(k) A_\mu^c(p) A^{d\nu}(q) A^{e\mu}(-p-k-q) + \right. \\
& \left. g \frac{1}{V^2} \sum_p \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu t^a A_\mu^a(k) \Psi(-p-k) \right] \times \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \quad (1.125)
\end{aligned}$$

Aplicam aceeasi procedura functiei de partitie dar de data aceasta introducem in integrand cantitatea $\frac{d\bar{\Psi}_f^r}{d\bar{\Psi}_f^r}$, unde f indica specia de fermioni iar r culoarea. Obtinem:

$$\begin{aligned}
Z_0 = & -i \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \times \\
& \left[\frac{1}{V} \bar{\Psi}_f^r \gamma^\mu k_\mu \Psi_f^r + \frac{1}{v^2} \sum_p \bar{\Psi}_f^r(k) \gamma^\mu p_\mu t_{rj}^a A_\mu^a(-p+k) \Psi_f^j(p) \right] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \quad (1.126)
\end{aligned}$$

Aici am utilizat relatia:

$$\begin{aligned}
& -i \left[\int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \bar{\Psi}_{f_1}^r(k) \times \right. \\
& \left. \exp[i \int d^4x \mathcal{L}] \right]_{\bar{\Psi}_f^i(k) \rightarrow \pm\infty} = 0 \quad (1.127)
\end{aligned}$$

intrucat campurile spinoriale anticomuta.

O procedura similara aplicata campurilor "ghosts" $c^c(k)$ conduce la:

$$\begin{aligned}
Z_0 = & -i \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \times \\
& \left[\frac{1}{V} k^2 \bar{c}^c(k) k^2 c^c(k) - \frac{i}{V^2} g \sum_p \bar{c}^a(p) p^\mu f^{abc} c^c(k) A_\mu^b(p-k) \right] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \quad (1.128)
\end{aligned}$$

In stadiul urmator aplicam operatorul $k^\mu \frac{d}{dk^\mu}$ ecuatiei (1.176) si obtinem:

$$\begin{aligned}
k^\mu \frac{dZ_0}{dk^\mu} = & \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \times \\
& i \left[-\frac{1}{V} k^2 A^{\nu}(k) A_\nu^a(-k) + \frac{2}{V} k^2 \bar{c}^a(k) c^a(-k) + \frac{i}{V^2} k^\mu \sum_p A_\nu^a(k) f^{abc} g A_\mu^b(p) A^{c\nu}(-p-k) - \right. \\
& \left. -\frac{i}{V^2} \sum_p k^\mu \bar{c}^a(k) g f^{abc} A_\mu^b(p) c^c(-p-k) + \frac{1}{V} \bar{\Psi}(k) \gamma^\mu k_\mu \Psi(k) \right] \times \exp[i \int d^4x \mathcal{L}], \quad (1.129)
\end{aligned}$$

Din Eq. (1.122) calculam:

$$k^\mu \frac{dZ_0}{d\bar{k}^\mu} = \left[N_f N - 2(N^2 - 1) \left[\frac{d}{2} - 1 \right] \right] Z_0. \quad (1.130)$$

Acum vom considera toate rezultatele anterioare din perspectiva renormalizarii. Lagrangianul renormalizat este:

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}_r = & -\frac{1}{2} \frac{1}{V} Z_3 \sum_n k_n^2 A^{\alpha\nu}(k_n) A_\nu^a(-k_n) + \frac{1}{V} Z_1 \sum_n k_n^2 \bar{c}^a(k_n) c^a(-k_n) + \\ & + \frac{i}{V^2} Z_{3g} g \sum_{n,m} k_n^\mu A_\nu^a(k_n) f^{abc} A_\mu^b(k_m) A^{c\nu}(-k_n - k_m) - \\ & - \frac{1}{V^3} Z_{4g} g^2 f^{abc} f^{ade} \sum_{n,m,p} A^{b\mu}(k_n) A^{c\nu}(k_m) A_\mu^d(k_p) A_\nu^e(-k_n - k_m - k_p) - \\ & - \frac{i}{V^2} Z'_1 \sum_{n,m} k_n^\mu \bar{c}^a(k_n) g f^{abc} A_\mu^b(k_m) c^c(-k_n - k_m) + \\ & + \frac{1}{V} Z_2 \sum_f \sum_n \bar{\Psi}_f(k_n) \gamma^\mu k_{\mu n} \Psi_f(k_n) + \frac{1}{V^2} g Z'_2 \sum_f \sum_{n,m} \bar{\Psi}_f(k_n) \gamma^\mu A_\mu^a t^a \Psi(k_m)_f. \end{aligned} \quad (1.131)$$

In consecinta Eq. (1.125) va deveni:

$$\begin{aligned} Z_0 = & \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) (-i) [-Z_3 \frac{k^2}{V} A^{\alpha\nu}(k) A_\nu^a(-k) + \\ & + Z_{3g} \frac{3i}{V^2} g k^\mu \sum_p f^{abc} A_\nu^a(k) A_\mu^b(p) A^{c\nu}(-k - p) - \frac{i}{V^2} Z'_1 g \sum_p p^\nu \bar{c}^b(p) f^{bac} A_\nu^a(k) c^c(-p - k) - \\ & - \frac{1}{V^3} g^2 Z_{4g} f^{bac} f^{bde} \sum_{p,q} A_\nu^a(k) A_\mu^c(p) A^{d\nu}(q) A^{e\mu}(-p - k - q) + \\ & + g \frac{1}{V^2} Z'_2 g \sum_p \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu t^a A_\mu^a(k) \Psi(-p - k)] \times \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (1.132)$$

Eq. (1.126) se va transforma in,

$$\begin{aligned} Z_0 = & -i \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \times \\ & \left[\frac{1}{V} Z_2 \bar{\Psi}_f^r \gamma^\mu k_\mu \Psi_f^r + \frac{1}{V^2} Z'_2 g \sum_p \bar{\Psi}_f^r(k) \gamma^\mu p_\mu t_{rj}^a A_\mu^a(-p + k) \Psi_f^j(p) \right] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (1.133)$$

in timp ce Eq. (1.128) va fi inlocuita de:

$$\begin{aligned} Z_0 = & -i \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \times \\ & \left[\frac{1}{V} Z_1 k^2 \bar{c}^c(k) k^2 c^c(k) - \frac{i}{V^2} g Z'_1 \sum_p \bar{c}^a(p) p^\mu f^{abc} c^c(k) A_\mu^b(p - k) \right] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (1.134)$$

In sfarsit Eq. (1.129) va conduce la:

$$\begin{aligned}
k^\mu \frac{dZ_0}{dk^\mu} = & \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \times \\
& i[-\frac{1}{V} Z_3 k^2 A^{\mu\nu}(k) A_\nu^a(-k) + Z_1 \frac{2}{V} k^2 \bar{c}^a(k) c^a(-k) + \frac{i}{V^2} Z_{3g} k^\mu \sum_p A_\nu^a(k) f^{abc} g A_\mu^b(p) A^{c\nu}(-p-k) - \\
& -\frac{i}{V^2} Z'_1 \sum_p k^\mu \bar{c}^a(k) g f^{abc} A_\mu^b(p) c^c(-p-k) + \frac{1}{V} Z_2 \bar{\Psi}(k) \gamma^\mu k_\mu \Psi(k)] \times \exp[i \int d^4 x \mathcal{L}]. \quad (1.135)
\end{aligned}$$

In formalismul integralei de drum functia "two point" pentru gluoni are expresia:

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T[A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2)] | \Omega \rangle = \\
\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int dA_\rho^c d\bar{c}^d dc^e d\bar{\Psi} d\Psi A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \exp[i \int d^4 x \mathcal{L}]}{\int dA_\rho^c d\bar{c}^d dc^e d\bar{\Psi} d\Psi \exp[i \int d^4 x \mathcal{L}]}. \quad (1.136)
\end{aligned}$$

Aplicam formula de reductie LSZ in spatiul Fourier si obtinem:

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T[A_\mu^a(p_1) \dots A_\nu^d(p_m) A_\rho^b(k_1) \dots A_\sigma^e(k_n)] | \Omega \rangle \sim \\
\sim p_i^0(k_j^0) \rightarrow E_{\vec{p}_i}(E_{\vec{k}_j}) \text{ polarization factor} \times \text{const} \times \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n \rangle \times \\
\left(\prod_{i=1}^m \frac{i Z_3^{1/2}}{p_i^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{i Z_3^{1/2}}{k_j^2 + i\epsilon} \right). \quad (1.137)
\end{aligned}$$

In lucrarile noastre anterioare am aratat cum se aplica aceasta formula termenilor care contin campurile de etalonare si "ghosts" in relatiile din Eqs. (1.132), (1.133), (1.134) si (1.135).

Formula LSZ este mai complicata pentru fermioni asa dupa cum se poate vedea din ecuatiile ummrate pentru un proces cu doi fermioni initiali si doi fermioni finali:

$$\begin{aligned}
out \langle f | i \rangle_{in} = \langle f | S | i \rangle \approx \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2 \exp[-ik_1 y_1] [\bar{u}_{s'_1}(k_1) (-i\gamma^\mu \partial_{\mu y_1} + m)]_{\beta_1} \times \\
\exp[-ik_2 y_2] [\bar{u}_{s'_2}(k_2) (-i\gamma^\mu \partial_{\mu y_2} + m)]_{\beta_2} \times \\
\langle 0 | T \Psi_{\beta_2}(y_2) \Psi_{\beta_1}(y_1) \bar{\Psi}_{\alpha_1}(x_1) \bar{\Psi}_{\alpha_2}(x_2) | 0 \rangle \times \\
[(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_{\mu x_1} + m) u_{s_1}(p_1)]_{\alpha_1} \exp[ip_1 x_1] \times \\
[(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_{\mu x_2} + m) u_{s_2}(p_2)]_{\alpha_2} \exp[ip_2 x_2]. \quad (1.138)
\end{aligned}$$

Aici $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ si β_2 sunt indici spinoriali si toate impulsurile sunt "on-shell".

Daca $a_s^\dagger(\vec{p})$ si $b_s^\dagger(\vec{p})$ sunt doi operatori care creeaza o particula cu sarcina +1 respectiv -1

se poate deduce urmatoarea relatie:

$$\begin{aligned}
a_s^\dagger(\vec{p})_{in} &\rightarrow i \int d^4x \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) u_s(\vec{p}) \exp[ipx] \\
a_s(\vec{p})_{out} &\rightarrow i \int d^4x \exp[-ipx] \bar{u}_s(\vec{p}) (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi(x) \\
b_s^\dagger(\vec{p})_{in} &\rightarrow i \int d^4x \exp[ipx] \bar{v}_s(\vec{p}) (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi(x) \\
b_s(\vec{p})_{out} &\rightarrow i \int d^4x \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) v_s(\vec{p}) \exp[-ipx].
\end{aligned} \tag{1.139}$$

Rescriem prima ecuatie din (1.139) in spatiul Fourier:

$$\begin{aligned}
a_s^\dagger(\vec{p}) &= i \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(k) \exp[ikx] (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) u_s(\vec{p}) \exp[ipx] = \\
&= i \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[ikx] \bar{\Psi}(k) (-\gamma^\mu k_\mu + m) u_s(\vec{p}) \exp[ipx] = \\
&= i \bar{\Psi}(p) (\gamma^\mu p_\mu + m) u_s(\vec{p}),
\end{aligned} \tag{1.140}$$

Formula de mai sus nu este utila intrucat este necesar sa exprimam $\bar{\Psi}(\vec{p})$ in functie de celelalte cantitati. Pentru a rezolva aceasta problema consideram suma:

$$\sum_s a_s^\dagger(\vec{p})_{in} \bar{u}_s(\vec{p}) = \sum_s i \bar{\Psi}(p) (\gamma^\mu p_\mu + m) u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}). \tag{1.141}$$

Din relatia,

$$\sum_s u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) = (-\gamma^\mu p_\mu + m), \tag{1.142}$$

obtinem:

$$\sum_s a_s^\dagger(\vec{p})_{in} \bar{u}_s(\vec{p}) = -i \bar{\Psi}(p) (p^2 - m^2). \tag{1.143}$$

Din Eq. (1.143) extragem:

$$\bar{\Psi}(p) = i \sum_s a_s^\dagger(\vec{p})_{in} \bar{u}_s(\vec{p}) \frac{1}{p^2 - m^2}. \tag{1.144}$$

Vom considera numai campurile fermionice. Mai intai impartim Eq. (1.132) la Z_0 ceea ce conduce la:

$$\begin{aligned}
1 &= \text{terms that do not involve fermions} + \\
&\frac{1}{Z_0} \int \prod_{fl} \prod_i \prod_j \prod_m \prod_n \prod_p dA_\mu^a(k_i) d\bar{c}^b(k_j) dc^d(k_m) d\bar{\Psi}_{fl}(k_n) d\Psi_{fl}(k_p) \times \\
&(-i)g \frac{1}{V^2} Z_2' \sum_p \bar{\Psi}(p) \gamma^\mu t_r^a A_\mu^a \Psi(p-k) \exp[i \int d^4x \mathcal{L}].
\end{aligned} \tag{1.145}$$

Dar ultimul termen din Eq.(1.145) este doar:

$$(-i)g\frac{1}{V^2}Z'_2\sum_p\langle\Omega|T[\bar{\Psi}(p)\gamma^\mu t_r^a A_\mu^a(k)\Psi(p-k)|\Omega\rangle. \quad (1.146)$$

Aplicand Eqs. (1.138) si (1.144) ecuatiei (1.146) obtinem pentru Eq. (1.145):

$$1 = \text{terms that do not involve fermions} + (-i)g\frac{1}{V^2}Z'_2\sum_p\frac{1}{p^2(p+k)^2k^2}\times\text{const} \\ \sum_{s,s'}(t_r^a)_{ij}\bar{u}_s(\vec{p})\langle(\vec{p},s)_i;\vec{k}\epsilon_{k\mu}^a|\gamma^\mu S|((p+k),s')_j\rangle u_{s'}(\vec{p+k}). \quad (1.147)$$

Observam ca in ultima ecuatie termenul in paranteza contine de fapt functia de "vertex" V_{ij}^a care este cunoscut din conditiile de renormalizare. Se obtine:

$$\bar{u}(\vec{p})V_{ji}^{a\mu}\gamma_\mu(t_r^a)_{ij}u_s(p+k)\approx\frac{N^2-1}{2}gp^2 \quad (1.148)$$

unde am utilizat faptul ca pentru fermionii "on-shell" $p^2 = m^2$ si de asemenea faptul ca dupa cum am definit aici functia de "vertex" ($V_{ji}^{a\mu} = gt_{ji}^a p^\mu$) aceasta contine deja o compresie intre doua stari fermionice. Factorul $\sum_p \frac{p^2}{k^2 p^2 (k+p)^2}$ conduce la o constanta in limita starilor "on shell".

Intrucat o procedura similara se aplica tuturor campurilor si interactiilor din Eqs. (1.132), (1.133), (1.134) and (1.135) aceste relatii vor deveni:

$$1 = aZ_3 + bZ_{3g}g^2 + cZ'_1g^2 + dZ_{4g}g^4 + gZ'_2g^2 \\ s_1 = s_2Z_2 + s_3Z'_2g^2 \\ r_1 = r_2Z_1 + r_3Z'_1g^2 \\ x = yZ_3 + zZ_1 + qZ_2 + uZ_{3g}g^2 + wZ'_1g^2, \quad (1.149)$$

unde toate constantele din fata sunt absorbite in noii coeficienti $a, b, c, d, e, x, y, z, q, u, v, w, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3$.

In schema de regularizare dimensionala constantele de reormalizare satisfac identitatile Slanov Taylor:

$$g_0^2 = \frac{Z_{3g}^2}{Z_3^3}g^2\mu^\epsilon = \frac{Z_{4g}}{Z_3^2}g^2\mu^\epsilon = \frac{Z_1'^2}{Z_1^2Z_3}g^2\mu^\epsilon = \frac{Z_2'^2}{Z_2^2Z_3}g^2\mu^\epsilon, \quad (1.150)$$

unde $d = 4 - \epsilon$ si μ este un parametru cu dimensiunea de masa. In metoda campurilor de

etalonare "background" se produce o mare simplificare data de relatiile:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z'_1 \\ Z_2 &= Z'_2 \\ Z_3 &= Z_{3g} = Z_{4g}. \end{aligned} \tag{1.151}$$

Atunci relatiile din Eq. (1.149) se pot scrie intr-o forma mai compacta:

$$\begin{aligned} 1 &= (f_1 + f_2g^2 + f_3g^4)Z_3 + f_4Z_1g^2 + f_5Z_2g^2 \\ 1 &= (t_1 + t_2g^2)Z_2 \\ 1 &= (c_1 + c_2g^2)Z_1 \\ 1 &= (h_1 + h_2g^2)Z_3 + Z_1(h_3 + h_4g^2) + h_5Z_2 \end{aligned} \tag{1.152}$$

Din ultimele ecuatii in Eq. (1.152) determinam:

$$Z_3 = \frac{(c_1t_1 - h_3t_1 - h_5c_1) + (c_2t_1 + c_1t_2 - h_3t_2 - h_4t_1 - h_5c_2)g^2 + (c_2t_2 - h_4t_2)g^4}{(h_1 + h_2g^2)(c_1 + c_2g^2)(t_1 + t_2g^2)} \tag{1.153}$$

Din primele trei ecuatii in Eq. (1.152) calculam:

$$Z_3 = \frac{c_1t_1 + (c_2t_1 + c_1t_2 - f_4t_1 - f_5c_1)g^2 + (c_2t_2 - f_4t_2 - f_5c_2)g^4}{(f_1 + f_2g^2 + f_3g^4)(c_1 + c_2g^2)(t_1 + t_2g^2)}. \tag{1.154}$$

Vom utiliza aceasta ultima ecuatie ca o constrangere. Daca egalizam ordinul coeficientilor cu cei din Eq. (1.153) obtinem conditia:

$$(c_2t_2 - h_4t_2)f_3 = 0 \tag{1.155}$$

din care deducem $c_2 = h_4$ intrucat nici unul dintre coeficienti nu e permis sa fie zero..

Sunt cativa coeficienti in Eq. (1.152) care pot fi determinati direct din ecuatiile precedente. Astfel din Eq. (1.135) si versiunile ei ulterioare (observand ca h_1 , h_3 si h_5 sunt asociati cu functiile "two point" pentru gluoni, "ghost" si fermioni) se poate calcula prin simpla integrare gaussiana:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{-4(N^2 - 1)}{NN_f - 2(N^2 - 1)} \\ h_3 &= \frac{2(N^2 - 1)}{NN_f - 2(N^2 - 1)} \\ h_5 &= \frac{N_f N}{NN_f - 2(N^2 - 1)}. \end{aligned} \tag{1.156}$$

Eq. (1.156) conduce la urmatoarea relatie de recurenta:

$$1 - h_3 - h_5 = h_1. \quad (1.157)$$

In mod similar din Eqs. (1.126) si (1.134) se poate determina $c_1 = t_1 = 1$ din aceleasi motive. Daca inlocuim in Eq.(1.153) valorile pentru coeficientii h_1, h_3, h_5, c_1, t_1 obtinute pana acum expresia pentru Z_3 devine:

$$Z_3 = \frac{1 + u_1 g^2}{1 + v_1 g^2 + v_2 g^4 + v_3 g^6}, \quad (1.158)$$

unde,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{t_2}{h_1} - \frac{h_3 t_2}{h_1} - \frac{h_5 c_2}{h_1} \\ v_1 &= c_2 + t_2 + \frac{h_2}{h_1} \\ v_2 &= \frac{h_2 t_2}{h_1} + c_2 t_2 + \frac{h_2 c_2}{h_1} \\ v_3 &= \frac{h_2 c_2 t_2}{h_1}. \end{aligned} \quad (1.159)$$

In schema de regularizare dimentionala constanta Z_3 poate fi scrisa ca:

$$Z_3 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_3^{(n)}}{\epsilon^n}. \quad (1.160)$$

Functia beta este definita de relatia:

$$\beta(g^2) = \mu^2 \frac{dg^2}{d\mu^2} = -\frac{1}{2} g^3 \frac{\partial Z_3^{(1)}}{\partial g} = -g^4 \frac{\partial Z_3^{(1)}}{\partial g^2}. \quad (1.161)$$

Identificam Eq. (1.158) cu Eq. (1.160) observand ca gradul de divergenta (dat de puteri in $\frac{1}{\epsilon}$) al coeficientilor u_1, v_1, v_2, v_3 este zero, unu sau mai mare ca unu:

$$\begin{aligned} &[1 + \frac{Z_3^{(1)}}{\epsilon} + \frac{Z_3^{(2)}}{\epsilon^2} + \dots][1 + v_1^{(0)} g^2 + \frac{v_1^{(1)}}{\epsilon} g^2 + v_2^{(0)} g^4 + \frac{v_2^{(1)}}{\epsilon} g^4 + v_3^{(0)} g^6 + \frac{v_3^{(1)}}{\epsilon} g^6 + \dots] = \\ &u_1^{(0)} g^2 + \frac{u_1^{(1)}}{\epsilon} g^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.162)$$

In ordinul $\frac{1}{\epsilon}$ se obtine:

$$\frac{Z_3^{(1)}}{\epsilon} [1 + v_1^{(0)} g^2] + \frac{v_1^{(1)}}{\epsilon} g^2 + \frac{v_2^{(1)}}{\epsilon} g^4 + \frac{v_3^{(1)}}{\epsilon} g^6 = \frac{u_1^{(1)}}{\epsilon} g^2 \quad (1.163)$$

Aici,

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= c_2^{(0)} + t_2^{(0)} + \frac{h_2^{(0)}}{h_1} \\ v_3^{(1)} &= \frac{(h_2 c_2 t_2)^{(0)}}{h_1}. \end{aligned} \quad (1.164)$$

Utilizand Eq. (1.152) si constrangerea $c_2 = h_4$ si considerand dezvoltarea in puteri de $\frac{1}{\epsilon}$ se obtine ca $c_2^{(0)} = t_2^{(0)} = h_2^{(0)} = 0$. Eq. (1.164) conduce la $v_3^{(1)} = 0$. In consecinta din Eq. (1.163) rezulta dependenta marimii $Z_3^{(1)}$ de constanta de cuplaj:

$$Z_3^{(1)} = \beta_0 g^2 + \beta_1 g^4, \quad (1.165)$$

unde coeficientii β_0 si β_1 sunt independenti de g^2 . Am determinat astfel forma functiei beta complete pentru QCD utilizand doar proprietatile globale ale functiei de partitie

In conformitate cu Eq. (1.161) functia beta pnetru toate ordinele contine numai primii doi coeficienti care nu depind de renormalizare si este data de:

$$\begin{aligned} \beta(g^2) &= \frac{dg^2}{d \ln \mu^2} = \\ &= -\left[\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f\right] \frac{g^4}{16\pi^2} - \left[\frac{34}{3}N^2 - 2\frac{N^2-1}{2N}N_f - \frac{10}{3}NN_f\right] \frac{g^6}{256\pi^4}. \end{aligned} \quad (1.166)$$

F. O noua perspectiva asupra tranzitiilor de faza pentru teoriile de etalonare.

Modelul Higgs abelian $U(1)$ este unul din cele mai simple teorii care contin atat campuri de etalonare cat si materie. Structura de faza a acestui model a fost studiata la temperatura zero atat pentru un Higgs compact $|H| = \text{const}$ cat si pentru $|H|$ care variaza. Regimul de temperatura finita a fost de asemenea analizat. S-a demonstrat in toate aceste cazuri ca modelul prezinta trei faze: faza Coulomb in care potentialul se comporta ca $V(r) \approx \frac{1}{r}$; faza Higgs unde potentialul este $V(r) \approx \text{const}$ si faza de "confinement" cu $V(r) \approx r$. Pentru cazul particular al unui Higgs in reprezentarea fundamentala cu sarcina unitate se pare ca nu exista o distinctie reala intre faza Higgs si cea de "confinement".

In aceasta subsectiune vom analiza modelul Higgs abelian fara a face presupuneri simplificatoare din perspectiva reprezentarii sale duale in functie de variabile fermionice. Sugeram ca aceasta descriere alternativa poate altera structura Lagrnagianului exprimat in functie de variabilele initiale. Parametrii importanti sunt coeficientii termenilor din Lagrangianul

modificat si marimea lor relativa indica exact faza in care sistemul este. Apoi utilizam formalismul integralei de drum sa aratam ca functia Lorentz invarianta $\langle A^\mu(x)A_\mu(y) \rangle$ este un parametru de ordine bun care indica comportamentul modelului in diferite faze.

Incepem cu modelul Higgs abelian $U(1)$ dat de Lagrangianul:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D^\mu\Phi^*D_\mu\Phi - V(\Phi), \quad (1.167)$$

unde,

$$\begin{aligned} D_\mu\Phi &= (\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi \\ V(\Phi) &= m^2\Phi^*\Phi + \frac{\lambda}{2}(\Phi^*\Phi)^2. \end{aligned} \quad (1.168)$$

Lagrangianul din Eq. (1.167) poate fi scris mai departe ca:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial^\mu\Phi^*\partial_\mu\Phi - ieA^\mu\Phi^*\partial_\mu\Phi + ieA_\mu\Phi\partial^\mu\Phi^* + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_1 &= e^2A_\mu A^\mu\Phi^*\Phi - m^2\Phi^*\Phi - \frac{\lambda}{2}(\Phi^*\Phi)^2. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Consideram descrierea duala a campului de etalonare si a celui scalar in functie de variabile fermionice:

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{M^2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \\ \Phi &= \frac{1}{M^2}(\bar{\Psi}\Psi + \bar{\Psi}\gamma^5\Psi) \end{aligned} \quad (1.170)$$

Formele bilineare de mai sus pot fi considerate independente intrucat fermionii "on-shell" au patru grade de libertate, campurile de etalonare lipsite de masa au doua iar campul scalar complex are doua grade reale de libertate. Aceasta este cu atat mai adevarat daca starile sunt "off-shell". Aceasta inseamna ca redefinirea campurilor facuta Eq. (1.170) este corespunzatoare din punctul de vedere al gradelor de libertate din Eq. (1.167).

Vom lucra cu Lagrangianul $\mathcal{L}$ in care vom ignora termenul de interactie λ si in care m^2 este un parametru infinitezimal. Consideram transformarea Fierz,

$$\begin{aligned} \Phi\Phi^* &= \frac{1}{M^2} [\bar{\Psi}\Psi\bar{\Psi}\Psi - \bar{\Psi}\gamma^5\Psi\bar{\Psi}\gamma^5\Psi] = \\ &= \frac{1}{2M^2} [\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi - \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma^5\Psi] = \frac{1}{2}[A^\mu A_\mu - A^{\mu 5}A_\mu^5] \end{aligned} \quad (1.171)$$

si scriem:

$$\begin{aligned} A_\mu^2 &= xA_\mu^2 + (1-x)[2|\Phi|^2 + (A_\mu^5)^2] \\ |\Phi|^2 &= y|\Phi|^2 + \frac{1-y}{2}[A_\mu^2 - (A_\mu^5)^2], \end{aligned} \quad (1.172)$$

unde x si y sunt parametri reali cu $0 \leq x \leq 1$ si $0 \leq y \leq 1$. Atunci $\mathcal{L}_1$ va deveni:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= e^2 \left[x A_\mu^2 + (1-x)[2|\Phi|^2 + (A_\mu^5)^2] \right] \left[y|\Phi|^2 + (1-y)/2[A_\mu^2 - (A_\mu^5)^2] \right] - m^2|\Phi|^2 = \\ &= 2e^2 y(1-x)|\Phi|^4 + e^2 \frac{x(1-y)}{2} A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + \\ &e^2 \left[xy + (1-x)(1-y) \right] A^\mu A_\mu |\Phi|^2 - m^2|\Phi|^2.\end{aligned}\quad (1.173)$$

Rezolvam ecuatia de miscare pentru campul auxiliar A_μ^5 si obtinem $A_\mu^5 = 0$. Asadar in ultima linie a ecuatiei am considerat $A_\mu^5 = 0$. In continuare vom analiza fazele Lagrangianului in Eq. (1.173) in functie de parametrii x si y .

Este clar ca termenii de interes in Lagrangianul din Eq. (1.173) sunt $(A_\mu A^\mu)^2$ si $|\Phi|^4$.

In continuare vom explica pe scurt procedura. Notam $z_1 = [x(1-y)]^{1/4}$ si $z_2 = [y(1-x)]^{1/4}$. Redefinim campurile ca $z_1 A_\mu = A'_\mu$ si $z_2 \Phi = \Phi'$ si rescriem Lagrangianul in functie de noile variabile pentru a pune in evidenta marimea relativa a termenilor cinetici. Vom utiliza ca parametru de ordine functia "two point" Lorentz invarianta $\langle A^\mu(x) A_\mu(y) \rangle$ si vom lucra in etalonarea Feynman. In final pentru a calcula parametrul de ordine ne vom intoarce la Lagrangianul intial cu variabilele $\Phi(x)$ si $A_\mu(x)$.

In concluzie gasim patru cazuri distincte:

1) Faza Higgs

Aceasta faza este obtinuta pentru urmatoarele valori ale parametrilor x si y : $x \approx 0$ si $y \approx 0$ sau $x \approx 1$ si $y \approx 1$. In ambele cazuri Lagrangianul complet are expresia:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{z_1^2} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{z_2^2} \partial^\mu \Phi'^* \partial_\mu \Phi' - \\ &-i \frac{e}{z_1 z_2^2} A'^\mu \Phi'^* \partial_\mu \Phi' + i \frac{e}{z_1 z_2^2} A'_\mu \Phi' \partial^\mu \Phi'^* + e^2 A'_\mu A_1'^\mu \Phi'^* \Phi' - \frac{m^2}{z_2^2} \Phi'^* \Phi'\end{aligned}\quad (1.174)$$

unde $z_1 \approx 0$ si $z_2 \approx 0$. Daca rezolvam pentru valoarea de asteptare a campului Higgs in Eq. (1.173) gasim:

$$\langle \Phi^2 \rangle = \frac{m^2}{4e^2 y(1-x)} = \text{large} \quad (1.175)$$

Aici consideram ca limitele parametrilor x si y sunt mai puternice decat limitele mici sau mari ale parametrilor m^2 si e^2 . Aceasta faza corespunde fazei Higgs. Observam ca vev-ul campului scalar in Eq. (1.175) introdus in Eq. (1.174) conduce la un termen de masa pentru bozonul Higgs.

Pentru a arata ca aceasta faza corespunde cu adevarat fazei Higgs redefinim campul Higgs ca $e\Phi \Rightarrow \Phi$. Atunci toti termenii care contin campul Higgs in Eq. (1.174) vor fi mici si pot fi neglijati. Vom calcula functia "two point" pentru campurile gluonice din Lagrangian.

Mai intai trebuie sa determinam functia de partitie in spatiul Fourier:

$$Z \approx \int dA_\mu(p) d\Phi(q) \exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_p A^\mu(p) p^2 A_\mu(-p) + i \sum_{p,q,r} A^\mu(p) A_\mu(q) \left[\Phi_1(r) \Phi(-p-r-q)_1 + \Phi(r)_2 \Phi_2(-p-r-q) \right] \right], \quad (1.176)$$

unde $\Phi_1(x) = \text{Re}\Phi(x)$ si $\Phi_2(x) = \text{Im}\Phi(x)$. Facem schimbarea de variabile $\Psi_1(p) = u\Phi_1(p)$ pentru $p \neq q$ si $\Psi_2(p) = u\Phi_2(p)$ unde q este arbitrar si fixat. Parametrul u este considerat mare si arbitrar. Dupa ce neglijam termenii mici functia de partitie devine:

$$\begin{aligned} Z &= \text{const} \frac{1}{u^N} \int dA_\mu(p) d\Phi_1(q) \exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_p A^\mu(p) p^2 A_\mu(p) + i \sum_p A^\mu(p) A_\mu(-p) \Phi_1(q) \Phi_1(-q) \right] = \\ &= \text{const} \frac{1}{u^N} \int dA_\mu(r) \frac{1}{\sum_p A^\mu(p) A_\mu(-p)} \exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_p A^\mu(p) p^2 A_\mu(p) \right] \end{aligned} \quad (1.177)$$

unde am considerat $\Phi(-p) = \Phi(p)^*$. Aici N este un numar interg foarte mare legat de numaratoarea impulsurilor pe latice; de exemplu toate impulsurile pot fi scrise ca k_n^μ cu $1 \leq n \leq N_{max}$ caz in care $N = 2N_{max} - 1$ pentru ca scadem $\Phi_1(q)$. Apoi utilizand,

$$\sum_{p^2} \frac{\delta}{\delta p^2} Z = \text{const} \frac{1}{u^N} \int dA_\mu(p) \exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_p A^\mu(p) p^2 A_\mu(p) \right] = \text{const} \prod_p \frac{1}{(p^2)^2} \quad (1.178)$$

obtinem:

$$Z = a \prod_p \frac{1}{(p^2)^2} + b \quad (1.179)$$

unde a si b sunt doua constante ccare nu depind de impulsuri. Functia "two point" Lorentz invarianta potae fi scrisa ca:

$$\langle A^\mu(p) A_\mu(-p) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta p^2} = -2a \frac{1}{(p^2)^3} \frac{1}{a \prod_q \frac{1}{(q^2)^2} + b} \prod_{q \neq p} \frac{1}{(q^2)^2} \approx \text{const} \frac{1}{(p^2)^3}. \quad (1.180)$$

Trebuie sa justificam rezultatul din Eq. (1.180). Pentru aceasta observam ca in timp ce a este finit cantitatea b masoara gradul de divergenta al functiei de partitie si este foarte larga. Atfel termenul a poate fi neglijat in comparatie cu termenul b .

Ne intereseaza potentialul dintre doua surse corespunzator parametrului de ordine pe care l-am ales. Consideram ca surse doua campuri scalare cu impulsurile q_1, q_2 asa incat $p^2 = (q_1 - q_2)^2 \approx |\vec{q}_1 - \vec{q}_2|^2 = |\vec{p}|^2$. Se obtine:

$$V = \text{const} \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[iqr]}{r} q \frac{1}{(q^2 + \mu^2)^3} = \frac{\text{const}}{r} \exp[-\mu r] [r + O(\mu)] \approx \text{const} \quad (1.181)$$

Aici integrala este evaluata pe un contur inchis deasupra in planul complex cu calcularea reziduului polului de ordinul trei $q = i\mu$. In limita μ tinde la zero se obtine rezultatul standard pentru faza Higgs care sugereaza ca potentialul este constant.

2) Faza Coulomb

Aceasta faza este obtinuta pentru $y \approx 1$ si $x \approx 0$. Lagrangianul corespunzator este:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \frac{1}{z_1^2} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{z_2^2} \partial^\mu \Phi'^* \partial_\mu \Phi' - \\ & -i \frac{e}{z_1 z_2^2} A'^\mu \Phi'^* \partial_\mu \Phi' + i \frac{e}{z_1 z_2^2} e A'_\mu \Phi' \partial^\mu \Phi'^*, \end{aligned} \quad (1.182)$$

unde $z_1 \approx 0$ si $z_2 \approx 1$. Campul de etalonare nu are masa si vev-ul campului Higgs este zero. Daca facem schimbarea de variabila $e\Phi \rightarrow \Phi$ campul scalar se decupleaza si Lagrangianul final contine doar termenul kinetic. Propagatorul este simplu $\frac{1}{p^2}$ si potentialul $V(r) \approx \frac{1}{r}$. Aceasta este faza Coulomb al modelului Higgs abelian.

3) Faza Higgs + "confinement"

Acest caz corespunde la $y \approx 0$ si $x \approx 1$ si are Lagrangianul:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \frac{1}{z_1^2} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{z_2^2} \partial^\mu \Phi'^* \partial_\mu \Phi' - \\ & -i \frac{e}{z_1 z_2^2} A'^\mu \Phi'^* \partial_\mu \Phi' + i \frac{e}{z_1 z_2^2} e A'_\mu \Phi' \partial^\mu \Phi'^* + e^2 (A'^\mu A'_\mu)^2 - \frac{m^2}{z_2^2} \Phi'^* \Phi', \end{aligned} \quad (1.183)$$

unde $z_1 \approx 1$ si $z_2 \approx 0$. Termenul kinetic pentru scalarul Higgs este foarte mare in timp ce cel pentru campul de etalonare este foarte mic. Alternativ termenul de interactie $A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu$ este foarte mare. Valoarea de asteptare a campului Higgs este foarte mare dupa cum se poate vedea in Eq. (1.175). Structura Lagrangianului care contine un termen foarte mare quadratic este specifica fazei de "confinement" in timp ce valoarea mare a vev-ului campului Higgs indica faptul ca sistemul este intr-o faza combinata: Higgs-"confinement".

4) Faza "confinement"

Parametrii x si y iau valorile: $y \approx 1/2$ si $y \approx 1/2$. Lagrangianul are expresia:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \frac{1}{z_1^2} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{z_2^2} \partial^\mu \Phi'^* \partial_\mu \Phi' - \\ & -i \frac{e}{z_1 z_2^2} A'^\mu \Phi'^* \partial_\mu \Phi' + i \frac{e}{z_1 z_2^2} e A'_\mu \Phi' \partial^\mu \Phi'^* + \frac{1}{2} e^2 A'_\mu A'^\mu \Phi'^* \Phi' - \frac{m^2}{z_2^2} \Phi'^* \Phi' + e^2 (A'^\mu A'_\mu)^2 \end{aligned} \quad (1.184)$$

unde $z_1 \approx \sqrt{1/2}$ si $z_2 \approx \sqrt{1/2}$. In acest caz termenii kinetici atat pentru scalar cat si pentru campul de etalonare sunt mici. Redefinim campul scalar ca $e\Phi \rightarrow \Phi$. Astfel se pot neglija toti termenii care contin campul scalar cu exceptia termenului de interactie cu campul de etalonare quadrilinear. Lagrangianul aproximativ in vechile variabile A_μ si Φ este:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\nu \partial^2 A_\nu + \frac{e^2}{8} (A^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} A^\mu A_\mu |\Phi|^2. \quad (1.185)$$

Vom utiliza aceeaasi abordare ca in Eqs. (1.177), (1.178) si (1.179). Obtinem:

$$Z = c + \int dA^\mu(x) \exp \left[i \int d^4x \frac{1}{2} A^\nu(x) \partial^2 A_\nu(x) + i \int d^4x \frac{e^2}{8} (A^\mu(x) A_\mu(x))^2 \right], \quad (1.186)$$

unde c este o constanta mare. Vom rescrie al doilea termen din partea dreapta a ecuatiei (1.186) ca:

$$\begin{aligned} \int dA^\mu(x) \times \exp \left[i \left[\int d^4x d^4y \frac{1}{2} A^\nu(x) \partial^2(x) \delta(x-y) A_\nu(y) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{e^2}{8} \int d^4x \int d^4y (A^\mu(x) A_\mu(y))^2 \delta(x-y) \right] \right], \end{aligned} \quad (1.187)$$

si definim operatorul $K(x, y) = \partial^2 \delta(x-y)$. Pentru a determina expresia din Eq. (1.187) este mai usor sa lucram in spatiul coordonatelor. Scriem:

$$\begin{aligned} \int d^4x \int d^4y \frac{1}{2} A^\nu(x) \partial^2(x) \delta(x-y) A_\nu(y) + \frac{e^2}{8} \int d^4x \int d^4y (A^\mu(x) A_\mu(y))^2 \delta(x-y) = \\ \int d^4x \int d^4y \left[\frac{e^2}{8} \left[A_\mu(x) A^\mu(y) + \frac{2}{e^2} \partial(y) \partial(x) \right]^2 \delta(x-y) - \right. \\ \left. \left[\frac{1}{2e^2} \partial^2(x) \partial^2(y) \delta(x-y) \right] \right]. \end{aligned} \quad (1.188)$$

Mai intai trebuie sa integram:

$$\int dA^\mu(x) \exp \left[i \int d^4x \int d^4y \frac{e^2}{8} \left[A_\mu(x) A^\mu(y) + \frac{2}{e^2} \partial(y) \partial(x) \right]^2 \delta(x-y) \right]. \quad (1.189)$$

Pentru aceasta facem schimbarea de variabile:

$$A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu(x). \quad (1.190)$$

Aceasta elimina dependenta de operatorul ∂^2 a integralei din Eq. (1.189) si conduce la:

$$\begin{aligned} & \int dA^\mu(x) \exp \left[i \int d^4x \int d^4y \frac{e^2}{8} [A_\mu(x)A^\mu(y) + \frac{2}{e^2} \partial(y)\partial(x)]^2 \delta(x-y) \right] = \\ & \int dA^\mu \exp \left[i \int d^4x \int d^4y \frac{e^2}{8} \delta(x-y) [A_\mu(x)A^\mu(y)]^2 \right] = d \end{aligned} \quad (1.191)$$

Determinam functia de partitie din Eqs. (1.186) si (1.191):

$$Z = b + d \exp \left[-i \frac{1}{2e^2} \partial^2(x) \partial^2(y) \delta(x-y) \right]. \quad (1.192)$$

Functia "two point" Lorentz invarianta este:

$$\langle A^\mu(x) A_\mu(z) \rangle = \text{const} \int d^4y \frac{1}{Z} \frac{\delta(y-z)\delta Z}{\delta K(x,y)} \approx -i \frac{d}{2e^2(c+d)} K(x,z) = \text{const} K(x,z) \quad (1.193)$$

Eq. (1.193) conduce la urmatorul propagator pentru campul de etalonare in spatiul Fourier:

$$\text{Propagator} \approx \frac{p^2}{M^4}, \quad (1.194)$$

unde M este o scala arbitrara.

Scriem termenul kinetic din Lagrangian asociat cu propagatorul din Eq. (1.194):

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A^\mu(-p) \frac{M^4}{p^2} A_\mu(p) = \\ & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x d^4y A^\mu(x) \exp[-ipx] A_\mu(y) \exp[ipy] \frac{M^4}{p^2} = \\ & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x d^4z A_\mu^a(x) \exp[ipz] A_\mu(z+x) \frac{M^4}{p^2}. \end{aligned} \quad (1.195)$$

Aici am facut schimbarea de variabile $y \rightarrow y - x$. Exprimam ultima linie din Eq. (1.195) in coordonate sferice si apoi redefinim impulsurile $pr = p'$ unde $r = |\vec{z}|$ si $p = |\vec{p}|$. Integrantul va primi un factor de r^2 care indica faptul ca avem o interactie bilineara de tip "confining". Asadar sugeram ca comportamentul termenului kinetic al campului de etalonare este primul indicator al comportamentului de tip "confining".

Principala idee a acestei subsectiuni este faptul ca orice camp intr-un Lagrangian are o descriere alternativa in functie de campuri cu spin diferit. In cazul modelului Higgs

abelian exista o schimbare de variabile naturala in functie de variabile fermionice. Utilizam aceasta descriere duala si transformarea Fierz a termenului quadrilinear pentru a reexprima Lagrangianul initial. Lagrangianul rezultat contine o serie de termeni care sunt caracterizati de probabilitati intre zero si unu. Aceste probabilitati indica faza in care este sistemul. Am determinat comportamentul sistemului in fiecare faza utilizand formalismul integralei de drum pentru a evalua parametrul de ordine care este functia "two point" a campului de etalonare.

G. Tranzitii de faza pentru teoriile de etalonare non-abeliene.

In aceasta subsectiune vom adopta un nou punct de vedere cu privire la structure de faza a QCD cu fermioni in reprezentarea fundamentala bazandu-ne pe faptul ca potentialul dintre doua surse este unul din indicatorii fazei in care este teoria. Pentru a stabili comportamentul teoriei studiem ecuatia Callan Symanzik pentru functia "two point" pentru gluoni. In acest context vom putea sa clarificam cateva aspecte cu privire la posibilele faze si in special cu privire la trecerea de la faza "confinement" la faza in care simetria chirala este rupta.

Mai intai vom revedea care este situatia curenta cu privire la diagrama de faza a QCD;

Incepem cu o teorie $SU(N)$ cu N_f fermioni in reprezentarea fundamentala. Functia beta pentru acest caz este cunoscuta pana la ordinul al patrulea. In schema 't Hooft aceasta functie se opreste la "two loops". Aceasta parte a functiei beta este independenta de schema de renormalizare si este data de:

$$\begin{aligned} \beta(g^2) &= \frac{dg^2}{d \ln \mu^2} = -b \frac{g^4}{16\pi^2} - c \frac{g^6}{256\pi^4} = \\ &= -\left[\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f\right] \frac{g^4}{16\pi^2} - \left[\frac{34}{3}N^2 - 2\frac{N^2-1}{2N}N_f - \frac{10}{3}NN_f\right] \frac{g^6}{256\pi^4}. \end{aligned} \quad (1.196)$$

In cele ce urmeaza vom considera o abordare care se bazeaza pe extinderea validitatii ecuatiilor Callan-Symanzik la domeniul nonperturbativ. Totusi se pot obtine cateva importante informatii despre diagrama de faza din studiul functiei beta.

Observam ca pentru $b > 0$, $N_f < \frac{11}{2}N$ teoria este "asymptotically free" ceea ce inseamna ca constanta de cuplaj tinde la zero pentru impulsuri largi. Pentru $b < 0$ teoria nu mai este "asymptotically free" ci "infrared free". Intrucat pentru $b < 0$ de asemenea $c < 0$ aceasta proprietate este pastrata la "two loops".

Vom discuta in detaliu regiunea in care $b > 0$. Daca se descreste numarul de specii de fermioni $N_f = \frac{11}{2}N$ mai intai se obtine $c < 0$. Aceasta inseamna ca exista o solutie a ecuatiei $\beta(g^2) = 0$ ori ca functia beta are un punct fix "non trivial". Aceasta se intampla pentru $(\alpha = \frac{g^2}{4\pi})$:

$$\begin{aligned} -b\alpha^{*2} - \frac{c}{4\pi}\alpha^* &= 0 \\ \alpha^* &= -\frac{4\pi b}{c}. \end{aligned} \quad (1.197)$$

Se poate arata ca pentru N_f aproape de $\frac{11}{2}N$ constanta de cuplaj este mica si se poate determina din functia beta. Se obtine ca pentru impulsuri mici constanta de cuplaj se apropie de punctul fix. Faza corespunzatoare se numeste faza conforma si a fost descrisa in literatura. Pe masura ce N_f descreste mai mult constanta de cuplaj creste si la o anumita valoare $N_f < \frac{11}{2}N$ se produce "confinement" si ruperea simetriei chirale. Desi se cunoaste faptul ca cele doua faze coexista pentru valori mici ale N_f nu se stie cu precizie daca tranzitiile de faza corespunzatoare se produc la acelasi N_f . In conformitate cu ceea ce se cunoaste ruperea simetriei chirale se produce cand,

$$\alpha = \alpha_c = \frac{2\pi N}{3(N^2 - 1)}. \quad (1.198)$$

sau cand dimensiunea "anomalous" a operatorului de masa fermionic este $\gamma_m = 1$.

Utilizand relatia $\alpha_c = \alpha^*$ se poate determina numarul critic N_f la care se produce ruperea simetriei chirale:

$$N_f^c = N \frac{100N^2 - 66}{25N^2 - 15}. \quad (1.199)$$

Pentru $N_f^c < N_f < \frac{11}{2}N$ teoria este in faza conforma; are un punct fix, este chiral simetrica si "deconfined". Pentru $N_f < N_f^c$ teoria este "confined" si cu simetria chirala rupta.

Incepem cu ecuatie Callan Symanzik pentru functia "two point" gluonica:

$$[p \frac{\partial}{\partial p} + 2 - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma_3 - \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m}] G^2(p, m, g) = 0. \quad (1.200)$$

Aici p este impulsul, $\beta(g)$ este functia beta, γ_3 este dimensiunea "anomalous" a functiei de unda gluonice si γ_m este dimensiunea "anomalous" a operatorului de masa fermionic. Trebuie sa clarificam care este definitia exacta a functiei beta si dimensiunii "anomalous" introduse in Eq. (1.200). Vom lucra in metoda "background gauge field" unde Z_3 este

constanta de renormalizare pentru functia de unda gluonica. Atunci:

$$\begin{aligned}\beta(g) &= \frac{1}{2}g \frac{\partial Z_3}{\partial \ln \mu} \\ \gamma_3 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial Z_3}{\partial \ln \mu} = -\frac{\beta(g)}{g}.\end{aligned}\tag{1.201}$$

Pentru a defini corect dimensiunea "anomalous" care intra in ecuatia Callan Symanzik trebuie sa luam in considerare variatia pozitiva a marimii corespunzatoare. Asadar expresia corecta pentru γ_m in Eq. (1.200) este,

$$\gamma_m = -\frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial \ln \mu}.\tag{1.202}$$

Suntem interesati cum se comporta functia Green "two point" la energii joase. Fara a pierde din generalitate putem considera $p = km$ unde p este impulsul, m este masa fermionului si k este o constanta. Ecuatia Callan Symanzik (1.200) devine:

$$\left[p \frac{\partial}{\partial p} (1 - \gamma_m) + 2 - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma_3\right] G^2(p, g, m) = 0.\tag{1.203}$$

In metoda "background gauge field" ecuatia de mai sus poate fi simplificata:

$$\left[p \frac{\partial}{\partial p} (1 - \gamma_m) + 2 - \beta(g) \left(\frac{\partial}{\partial g} - \frac{2}{g}\right)\right] G^2(p, g, m) = 0.\tag{1.204}$$

Avem o ecuatie diferentiala cu doua variabile p si g si ne asteptam la un comportament critic cand coeficientii operatorilor isi schimba semnul. Mai intai avem nevoie de o solutie a Eq. (1.204) la punctul fix "infrared". Punem conditia $\beta(g) = 0$ (pentru $\frac{g^{*2}}{4\pi} = -\frac{4\pi b}{c}$) care conduce la:

$$[(1 - \gamma_m)p \frac{\partial}{\partial p} + 2] G^2(p, g, m) = 0.\tag{1.205}$$

Aceasta ecuatie are o solutie simpla:

$$G^2(p, g, m) \approx \frac{1}{p^{1-\gamma_m}}.\tag{1.206}$$

Apoi punem conditia $\gamma_m = 2$, unde la "one loop":

$$\gamma_m = 3 \frac{N^2 - 1}{N} \frac{g^2}{16\pi^2},\tag{1.207}$$

si rezolvam pentru g_c :

$$\frac{g_c^2}{4\pi} = \frac{8\pi N}{3(N^2 - 1)}.\tag{1.208}$$

Pentru aceasta valoare specifica a γ_m functia Green $G^2(p, g, m)$ se va apropia de:

$$G^2(p, g, m) \approx p^2, \quad (1.209)$$

ceea ce la energii joase va conduce la un potential de tip $V(r) \approx r$. Intrucat deja ne situam in regimul critic unde $g = g^*$ punem conditia $g_c = g^*$ si obtinem numarul corespunzator de specii fermionice:

$$N_f^c = N \left(\frac{101N^2 - 33}{32N^2 - 12} \right). \quad (1.210)$$

Studii mai vechi sugereaza ca comportamentul masei la ruperea simetriei chirale este:

$$m(\mu) \approx \frac{1}{\mu} \quad (1.211)$$

ceea ce in notatia noastra inseamna $\gamma_m = -\frac{d \ln m}{d \ln \mu} = 1$. Cand γ_m este mai mare si se apropie de 1 observam din Eq. (1.205) ca functia Green devine zero pentru energii joase si infinita pentru energii inalte ceea ce indica un comportament critic. Sugaram ca acest comportament al functiei Green indica tranzitia la faza de rupere a simetriei chirale. Conditia $\gamma_m = 1$ conduce la constanta de cuplaj critica $\alpha_s(g_s)$:

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} = \frac{4\pi N}{3(N^2 - 1)}. \quad (1.212)$$

Constrangerea $g_s = g^*$ duce la numarul critic de specii la care se produce tranzitia la faza ruperii simetriei chirale:

$$N_f^s = N \left(\frac{67N^2 - 33}{19N^2 - 9} \right). \quad (1.213)$$

Observam ca aceasta valoare este in regiunea $b > 0$ si $c < 0$ unde exista un punct fix "non trivial".

Pentru N mare tranzitia la faza ruperii simetriei chirale se produce la $N_f^s \approx 3.5N$ in timp ce tranzitia la faza de "confinement" se produce la $N_f^c \approx 3.1N$ aratand ca exista valori ale N_f pentru care exista rupere a simetriei chirale dar nu "confinement".

In aceasta subsectiune am introdus o noua metoda pentru a studia diagrama de faza in planul (N, N_f) care se bazeaza doar partial pe functia beta. Incepem cu ceea ce cunoastem despre functia beta si dimensiunea "anomalous" si utilizam aceste informatii sa analizam functia Green "two point" gluonica din ecuatie Callan Symanzik corespunzatoare. Unul

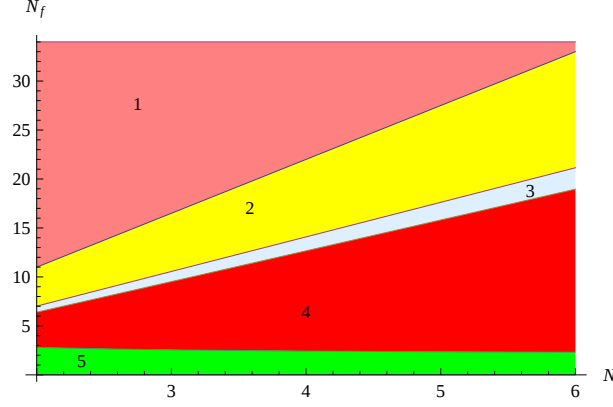


FIG. 1: Diagrama de faza a unei teorii de etalonare $SU(N)$ in functie de numarul de culori N si specii fermionice N_f . Numerele 1-5 reprezinta fazele distincte: 1-”infrared free”; 2-”conformal”; 3-”rupere slaba a simetriei chirale”; 4-”confinement” si rupere a simetriei chirale; 5-”strong confinement” si rupere a simetriei chirale.

din rezultatele noastre principale este ca tranzitia la faza de rupere a simetriei chirale se produce la,

$$N_f^s = N \left(\frac{67N^2 - 33}{19N^2 - 9} \right), \quad (1.214)$$

in timp ce tranzitia la faza ”confinement” se produce la valori usor mai scazute ale N_f :

$$N_f^c = N \left(\frac{101N^2 - 33}{32N^2 - 12} \right). \quad (1.215)$$

Mai mult decat atat studiul ecuatiei Callan Symanzik equation sugereaza ca pentru valori ale N_f exista posibilitatea sa se produca inca o tranzitie de faza la:

$$N_f^{cs} = \frac{40N^4 + 21N^2 - 27}{19N^3 - 9N}. \quad (1.216)$$

Sugeram ca aceasta tranzitie de faza corespunde unei regiuni unde atat ruperea simetriei chirale cat si ”confinement” devin puternice intrucat functia beta la ”two loops” devine $\frac{\beta(g)}{g} \leq -1$. Confirmarea acestei faze cat si descrierea ei ar necesita utilizarea unor metode nonperturbative alternative care nu fac obiectul acestui studiu.

In Fig 1 reprezentam diagrama de faza la temperatura zero a unei teorii de etalonare $SU(N)$ obtinuta in urma analizei noastre.

II. LUCRARI RAPORTATE IDEI PENTRU PERIOADA SEPTEMBRIE 2013-DECEMBRIE 2015

1. "About the role of scalars in a gauge theory", R. Jora, S. Nasri, arXiv: 1310.6122, Rom. J. Phys. 60, 9-10 (2015).
2. "A hierarchy of the quark masses in a top condensate model with multiple Higgses", A. H. Fariborz, R. Jora, S. Nasri, J. Schechter, arXiv:1310.1721, Modern Physics Letters A 29, 6, 1450030 (2014).
3. "A nonperturbative method for the scalar field theory", R. Jora, arXiv:1403.2227 (2014), Physics Letters B 741, 223-231 (2014).
4. "A hint of a strong supersymmetric standard model", R. Jora and J. Schechter, arXiv:1403.3778 (2014), Int. J. Mod. Phys. A 29, 31, 1460192 (2014).
5. "A semi perturbative method for QED", R. Jora and J. Schechter, arXiv:1407.8172 (2014), Rom. J. Phys. 60, 7-8 (2015).
6. "Tree level relations in a composite electroweak theory", A. H. Fariborz, R. Jora and J. Schechter, arXiv:1407.6546 (2014), Mod. Phys. Lett. A 29, 31, 1450166.
7. "Probing scalar mesons in semi-leptonic decays of D_s^+ , D^+ and D^0 ", A. H. Fariborz, R. Jora, J. Schechter, M.N. Shahid, arXiv:1407.7176 (2014), Int. J. Mod. Phys. A 30 02, 1550012 (2015).
8. "A semiclassical approach for the Higgs boson", A.H. Fariborz, R. Jora, J. Schechter, arXiv:1409.7886 (2014), Int. J. Mod. Phys. A 29, 32, 1450196.
9. "A nonperturbative method for the Yang Mills Lagrangian", R. Jora, arXiv:1411.0211 (2014), Int. J. Mod. Phys. A 30 13, 1550070 (2015).
10. "Abelian Higgs model and its phase transitions revisited", R. Jora, arXiv: 1502.04293 (2015), in proces de evaluate.
11. "How important is $i\epsilon$ in QFT", A. H. Fariborz, R. Jora and J. Schechter, arXiv:1503.00101 (2015), Int. J. Mod. Phys. A 30 14, 1550071 (2015).
12. " Φ^4 Theory is trivial", R. Jora, arXiv: 1503.07298 (2015), in proces de evaluate.
13. "Phase transitions for SU(N) gauge theories with arbitrary number of flavors", R. Jora, arXiv: 1505.07274 (2015), acceptata spre publicare in Int. J. Mod. Phys. A.
14. "A solution to the naturalness problem", A. H. Fariborz and R. Jora, arXiv: 1506.00079 (2015), in proces de evalaure.

15. " A nonperturbative method for QCD", R. Jora, arXiv:1506.06473 (2015), in proces de evaluare.

16. " A purely quark Lagrangian for QCD", A. H. Fariborz and R. Jora, arXiv:1509.05993 (2015), in proces de evaluare.

17. " Note on the standard model as an effective theory", A. H. Fariborz and R. Jora, arXiv: 1509.05993 (2015), in proces de evaluare.

18. " About the particle structure and content of the standard model", R. Jora, arXiv: 1510.08223 (2015), in proces de evaluare,

In consecinta am realizat toate activitatile pe anii 2013, 2014, 2015.

Consider ca activitatile preconizate in cadrul propunerii de proiect au fost implementate intr-o mare masura si ca realizarea acestora va fi finalizata cu succes pana la sfarsitul derularii proiectului.

Director de Proiect

Catalina Renata Jora